

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES-MATHÉMATIQUES

par

Michel DUPUY

INGÉNIEUR GÉOGRAPHE

1^{re} THÈSE. — L'interpolation complexe et ses applications en géodésie et cartographie

2^e THÈSE. — Questions posées par la Faculté

Résolution des systèmes d'équations linéaires par approximations successives;
travaux de FRIEDRICH *

soutenues le 24 Janvier 1953 devant la Commission d'examen

MM. J. PERES Président

G. DARMOIS }
R. THIRY } Examinateurs

PARIS

Institut Géographique National

1954

* Cet exposé ne figure pas dans le présent volume

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES-MATHÉMATIQUES

par

Michel DUPUY

INGÉNIEUR GÉOGRAPHE

1^{re} THÈSE. — L'interpolation complexe et ses applications en géodésie et cartographie

2^e THÈSE. — Questions posées par la Faculté

Résolution des systèmes d'équations linéaires par approximations successives;
travaux de FRIEDRICH *

soutenues le 24 Janvier 1953 devant la Commission d'examen

MM. J. PERES Président

G. DARMOIS
R. THIRY } Examineurs



PARIS

Institut Géographique National

1954

* Cet exposé ne figure pas dans le présent volume

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET.

PROFESSEURS

G. JULIA	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure	CHRETIEN	T Chimie minérale
A. DENJOY	T Théorie des Fonctions	P. DRACH	T Zoologie
L. LUTAUD	T Géographie physique et Géologie dynamique	KASTLER	T Physique
E. DARMOIS	T Enseignement de Physi- que	CHATELET	T Arithmétique et théorie des nombres
Robert LEVY	T Physiologie comparée	EPHRUSSI	T Génétique
FOCH	T Mécanique physique et expérimentale	WURMSER	T Biologie physico-chimi- que
PAUTHENIER	T Electrotechnique géné- rale	BAUER	T Chimie - Physique
De BROGLIE	T Théories physiques	RIVIERE	T Géologie (P. C. B.)
JOB	T Chimie générale	GAUTHERET	T Biologie végétale (P. C. B.)
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées	LUCAS	T Physique
COMBES	T Physiologie végétale	A. THOMAS	T Evolution des êtres or- ganisés
GARNIER	T Géométrie supérieure	ARNULF	T Optique appliquée
PERES	T Mécanique des fluides et applications	Max MORAND	T Physique
LAUGIER	T Physiologie générale	SOLEILLET	T Physique
TOUSSAINT	T Technique Aéronautique	FORTIER	T Mécanique expérimenta- le des fluides
M. CURIE	T Physique (P. C. B.)	DANJON	T Astronomie
G. RIBAUD	T Hautes températures	FROMAGEOT	T Chimie biologique
CHAZY	T Mécanique analytique et Mécanique céleste	LAPORTE	T Physique générale et Radioactivité
CROZE	T Physique théorique et physique céleste	JANET	T Mathématiques générales
DUPONT	T Théories chimiques	PETIT	T Biologie maritime
VALIRON	T Calcul différentiel et Calcul intégral	QUENEY	T Météorologie et dynami- que atmosphérique
BARRABE	T Géologie structurale et géologie appliquée	GALLIEN	T Biologie animale (P. C. B.)
G. DARMOIS	T Calcul des probabilités et Physique mathéma- tique	EICHHORN	T Biologie végétale (P. C. B.)
Jacques BOURCART ..	T Géographie physique et Géologie dynamique	DE CUGNAC	T Biologie végétale (P. C. B.)
AUBEL	T Chimie biologique	Mlle CAUCHOIS	T Chimie - Physique
Mme JOLIOT-CURIE ..	T Physique générale et Radioactivité	THELLIER	T Physique du Globe
PLANTEFOL	T Botanique	AUDUBERT	T Electrochimie
CABANNES	T Recherches physiques	L'HERITIER	T Génétique
GRASSE	T Evolution des êtres or- ganisés	GRIVET	T Radio Electricité
PREVOST	T Chimie organique	PONCIN	T Mécanique des fluides
BOULIGAND	T Application de l'analyse à la Géométrie	THIRY	T Mécanique appliquée
CHAUDRON	T Chimie appliquée	DUBREIL	T Mathématiques générales
WYART	T Minéralogie	QUELET	T Chimie (P. C. B.)
TEISSIER	T Zoologie	CAGNIARD	T Géophysique appliquée
MANGENOT	T Biologie végétale	CHAMPETIER	T Chimie appliquée
P. AUGER	T Physique quantique et relativité	CUVILLIER	T Géologie structurale et Géologie appliquée
MONNIER	T Physiologie générale	JUNG	T Pétrographie
PIVETEAU	T Géologie	TRILLAT	T Physique (P. C. B.)
ROCARD	T Physique	WIEMANN	T Chimie (P. C. B.)
H. CARTAN	T Mathématiques (E. N. Su- périeure)	JACQUINOT	T Physique (P. C. B.)
SCHAEFFER	T Physiologie des fonctions	VASSY	T Physique de l'atmosphère
LAFFITTE	T Chimie générale	DESTOUCHES	T Théories physiques
FAVARD	T Mécanique générale	M. PRUVOST	T Géologie
COULOMB	T Physique du Globe	AMIEL	T Chimie (P. C. B.)
Mlle COUSIN	T Biologie animale (P. C. B.)	HOCART	T Minéralogie
		MACHEBOEUF	T Microbiologie
		J.-P. MATHIEU	T Physique (P. C. B.)
		COUTEAUX	T Biologie animale (P. C. B.)
		MAY	T Biologie animale (P. C. B.)
		CHOQUET	T Calcul différentiel
		FELDMANN	T Biologie (P. C. B.)
		GUINIER	T Physique (P. C. B.)
		JOST	T Biologie (P. C. B.)

Secrétaire Ch. MONIER

PREMIERE PARTIE

ÉTUDE GÉNÉRALE DE L'INTERPOLATION COMPLEXE

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE GÉNÉRALE DE L'INTERPOLATION COMPLEXE

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE GÉNÉRALE DE L'INTERPOLATION COMPLEXE

CHAPITRE I : FORMULE D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

CHAPITRE II : METHODES D'INTERPOLATION NUMERIQUE DANS LA MAILLE CARREE.

BIBLIOGRAPHIE POUR LA PREMIÈRE PARTIE

- "Sur quelques propriétés des différences divisées" P. MONTEL Journ. de Math. Pures et Appliquées, IXème série, 16, pp. 219, 231, 1937.
 - "Coefficients for Interpolation within a Square Grid in the Complex Plane" by A.N. Lowan and H.E. Salzer, Journ. Math. Phys., vol. 23, pp. 156-166, 1944.
 - "Coefficients for Complex Quartic, Quintic and Sextic Interpolation within a Square Grid" by H.E. Salzer, Journ. Math. Phys., vol. 27, pp. 136-156, 1948.
 - "Formulas for Complex Interpolation" by A.N. Lowan and H.E. Salzer, Quart. Appl. Math. vol. 2, pp. 272-274, 1944.
 - "Formulas for Direct and Inverse Interpolation of a Complex Function Tabulated along Equidistant Circular Arcs", by H.E. Salzer, Journ. Math. Phys., vol. 24, pp. 141-143 (MT 36) 1945.
 - "Alternative Formulas for Direct Interpolation of a Complex Function Tabulated along Equidistant Circular Arcs", by H.E. Salzer, Journ. Math. Phys., vol. 26, pp. 56-61, 1947.
- Toutes les études ci-dessus sont publiées sous les auspices du National Bureau of Standards, Washington.
- "Interpolation Coefficients for use on the complex Plane", by Woodward, Philos. Magazine, Avril 1946, Août 1948.
 - "Finite difference Formulae for the Square Lattice", by Bickley, Quarterly Journal of Mechanics and applied Mathematics, Vol. 1, 1948.

PREMIERE PARTIE

ÉTUDE GÉNÉRALE DE L'INTERPOLATION COMPLEXE

CHAPITRE I : FORMULES D'INTERPOLATION

CHAPITRE II : MÉTHODES D'INTERPOLATION NUMÉRIQUE DANS LE PLAN COMPLEXE

BIBLIOGRAPHIE

POUR LA PREMIERE PARTIE

Digitized by the Internet Archive
in 2026

CHAPITRE PREMIER

FORMULE D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

INTRODUCTION

Le présent chapitre a pour objet l'étude détaillée de la formule d'interpolation de Lagrange et de ses conséquences.

On commence par s'occuper des coefficients littéraux (partie indépendante de x) de la formule de Lagrange (notation: γ_i) et des formes simples qu'ils prennent pour la base rectiligne équidistante et pour les bases polygonales régulières (fermées...) comprenant éventuellement leur centre. L'augmentation indéfinie de l'ordre de ces polygones réguliers conduit à la formule du contour circulaire de Cauchy, dont il est intéressant d'étudier à ce propos la valeur pratique et le mode d'emploi éventuel dans les calculs numériques, supposant donnée une base circulaire continue.

On s'occupe ensuite du théorème de la composition des interpolations, qui donne le moyen d'effectuer une interpolation d'ordre quelconque par une succession d'interpolations linéaires; propriété qui découle directement de la formule de Lagrange et peut s'établir aussi par les différences divisées (1).

On en tire les conséquences suivantes :

étudiant l'enchaînement des compositions d'interpolation, on écrit la relation existant entre des interpolées de rang quelconque, c'est-à-dire, comment on peut utiliser des interpolées d'ordre 3 directement pour obtenir des interpolées d'ordre 5, et autres cas semblables. Une formule de type Lagrangien peut ainsi être écrite, qui introduit des coefficients γ_i (ne dépendant pas de x) dont on calcule la valeur pour la base rectiligne équidistante et pour certaines bases complexes.

On applique ensuite directement la composition linéaire à la recherche de coefficients barycentriques (Lagrangiens) pour les bases régulières d'ordre croissant de 2 à 5, extraites de la maille carrée. Ces tables de coefficients sont utiles pour la pratique, comme on le verra dans le chapitre suivant consacré à la maille carrée.

Enfin on s'occupe des valeurs interpolées elles-mêmes et, pour le cas d'une interpolation d'ordre quelconque dans une base irrégulière complexe, on accomplit l'opération par voie purement graphique, en tirant partie de l'interprétation géométrique immédiate de l'interpolation linéaire du domaine complexe. On construit ainsi des interpolées d'ordre quelconque par une suite de constructions de triangles semblables selon un processus invariable. L'application au problème classique de l'adaptation des systèmes de coordonnées géodésiques est envisagée comme principal exemple, mais on peut en concevoir beaucoup d'autres dans les problèmes où l'on doit interpoler des champs de vecteurs à partir d'un certain nombre de valeurs réparties arbitrairement dans le plan.

I. I — FORMULE D'INTERPOLATION DE LAGRANGE.

On étudie la formule d'Interpolation de Lagrange associée à une base de p points

$$\left[\begin{matrix} y \\ p \end{matrix} \right] \dots : \left[\begin{matrix} y_1 & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_p \\ a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_p \end{matrix} \right]$$

C'est une formule exprimant explicitement l'ordonnée $y(x)$ du polynôme défini par la base $\left[\begin{matrix} Y_i \\ p \end{matrix} \right]$. On a

$$(1) \quad y(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i y_i$$

$$(2) \quad \alpha_i = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_p)}{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_p)}$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$$

(1) La propriété en question est connue mais rarement signalée dans les exposés classiques sur l'interpolation. MILNE la signale (Numerical calculus, Princeton University Press) et nous savons par ailleurs que l'algorithme de composition des interpolations linéaires est utilisé par la grande Machine Electronique E. D. S. A. C. de Cambridge, mise en service en 1949.

Les coefficients α_i peuvent être appelés coefficients barycentriques en vertu de (3). Il importe de remarquer que les équations ci-dessus sont vraies dans le domaine complexe; dans ce domaine, nous utiliserons les notations

z pour la variable (se substituant à x)

U pour la fonction (se substituant à y)

Plus généralement, on peut écrire :

$$(4) \quad y(x) = \sum_i y_i \cdot \beta_i / \sum \beta_i$$

Les β_i étant définis à une constante multiplicative près.

La quantité à mettre en facteur est évidemment $\pi(x - a_i)$

que nous appelons "Diviseur de x pour la base $[a_i]$ ".

La formule obtenue en dégagant ce facteur commun

$$(5) \quad y(x) = \sum_i y_i \frac{\gamma_i}{x - a_i} / \sum \frac{\gamma_i}{x - a_i}$$

fait apparaître la manière simple dont intervient x , et met en évidence des coefficients γ_i qui ne dépendent plus que du dispositif de la base. On peut écrire

$$(6) \quad \gamma_i = 1 / \prod_{j \neq i}^{(j)} (a_i - a_j)$$

La formule (5) est à priori intéressante pour les calculs en particulier dans le domaine réel où les divisions s'effectuent directement à la machine.

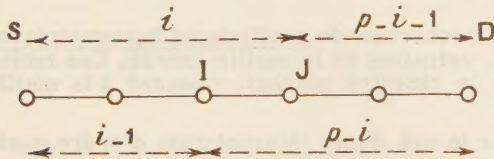
D'après cela, les seules quantités auxiliaires nécessaires pour interpoler dans une base (a_i) sont les γ_i qu'il suffit, comme on a dit, de connaître en valeur relative les uns par rapport aux autres.

La détermination des γ_i est particulièrement simple dans les deux cas suivants :

base rectiligne équidistante

base (dans le domaine complexe) formant un polygone régulier fermé.

BASE RECTILIGNE EQUIDISTANTE



$$(7) \quad \gamma_i = 1 / \pi (a_i - a_j)$$

$$(8) \quad \gamma_{i+1} = 1 / \pi (a_{i+1} - a_j)$$

$$(9) \quad \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \frac{ID}{JS} = (-1)^{p-i} \frac{1}{i}$$

S = point extrême gauche

D = point extrême droite

Si l'on prend, comme de coutume, la longueur unité en abscisses, égale à un intervalle tabulaire, la relation (9) montre que les γ_i sont proportionnels aux coefficients du binôme $(-U + V)^{p-1}$, le facteur de proportionnalité étant $1/(p-1)!$

En posant

$$B_i = (-1)^{p-1-i} C_{p-1}^i$$

on obtient la formule d'interpolation pour p points équidistants

$$(10) \quad y(x) = \sum \frac{B_i}{x - a_i} y_i / \sum_p \frac{B_i}{x - a_i}$$

qu'on peut écrire avec la notation β_i

$$y(x) = \sum_p \beta_i y_i / \sum_p \beta_i$$

mais comme

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{(p-1)!}{\pi (x - a_i)} \quad \text{et} \quad \sum \alpha_i = 1$$

$$(10 \text{ bis}) \quad \sum \beta_i = (p-1)! / \pi (x - a_i)$$

relation utile pour la vérification des calculs numériques.

Dans l'emploi pratique, on utilise le polynôme de Lagrange $y(x)$ ainsi construit pour représenter d'une manière approchée une fonction Y connue empiriquement par les coordonnées y_i .

L'écart (ou le reste) en un point est donné par la formule généralisée des accroissements finis :

$$Y - y(x) = Y - \sum \alpha_i y_i = \pi_p(x - a_i) \cdot \frac{1}{p!} \frac{d^p Y}{dx^p}(\theta)$$

θ : point intérieur au segment d'encombrement $x, a_1, \dots, a_n$

Pour le cas des entrées équidistantes, par suite des mises en facteurs effectuées en passant des α_i aux β_i , on peut écrire :

$$(11) \quad Y = \left[\sum \beta_i y_i + \frac{1}{p} \frac{d^p Y}{dx^p}(\theta) \right] : \sum \beta_i$$

formule qui permet l'estimation rapide du reste en profitant des calculs faits pour l'interpolation proprement dite.

Précision relative de l'interpolation dans cette base - justification de la méthode de l'interpolation centrée

Supposant connue une limite supérieure K de $\frac{1}{p} \frac{d^p Y}{dx^p}$ dans l'intervalle $a_1, \dots, a_n$, on a une estimation majorée de l'erreur selon

$$\varepsilon(n) = Y - y(x) < \eta(x) = K / \sum \beta_i(x)$$

et l'on voit d'après (10 bis) que cette fonction $\eta(x)$ est maximum quand $\pi(x - a_i)$ est lui-même maximum.



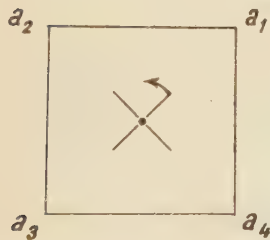
Etudions la variation de $\eta(x)$ quand x décrit la base. L'erreur, s'annulant en chaque point de base, atteint un maximum local dans chaque segment intermédiaire; le plus petit de ces maximum se trouve au milieu de l'intervalle central de la base pour les bases à nombre pair de points, ce qui justifie la règle d'employer les interpolations centrées.

On peut remarquer en outre que les maximum locaux pour les autres segments, vont se décalant progressivement vers les extrémités latérales de la base.

BASE POLYGONE REGULIER (DOMAINE COMPLEXE)

La formule d'interpolation mise sous l'aspect (5)

$$(5) \quad U(z) = \sum U_i \frac{\gamma_i}{z - a_i} / \sum \frac{\gamma_i}{z - a_i}$$



trouve un autre cas de simplification lorsque la base (a_i) est un polygone régulier du plan complexe, car les γ_i

$$\gamma_i = 1 / \prod_{p=1}^{p-1} (a_i - a_j)$$

offrent alors un aspect de permutation circulaire à l'image du polygone lui-même; considérant, pour fixer les idées, le cas d'un carré, la rotation élémentaire $+\frac{\pi}{2}$ intervient sur chacun des trois facteurs d'un produit π ; il en résulte que les π sont en progression géométrique de raison $e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc, les γ_i en progression géométrique de raison $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Le résultat se généralise pour un polygone régulier d'ordre quelconque, p ; on a toujours la formule :

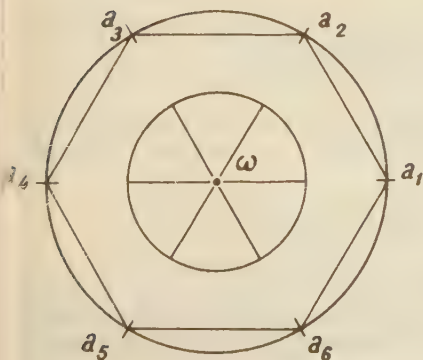
$$(12) \quad \beta_i = \frac{a_i}{z - a_i}$$

a_i étant racine $p^{\text{ème}}$ de l'unité ($a_i^p = 1$).

Lorsque la base comprend en outre le centre du polygone, les γ_i relatifs à chacun des p sommets offrent une permutation circulaire de raison :

$$\left(\left(1 \frac{1}{p} \right)^p \right)^{-1} = 1$$

ils sont donc égaux entre eux.



Si l'on prend l'axe réel selon l'un des axes de symétrie du polygone régulier, le γ_i pour le point central ω , défini par la formule (6), se trouve être réel. Un calcul simple montre qu'on a la formule générale :

$$(13) \quad U(z) = \left[\sum U_i \frac{1}{z - a_i} - U_\omega \frac{p}{z - \omega} \right] / \left[\sum \frac{1}{z - a_i} - \frac{p}{z - \omega} \right]$$

I. 2 — PASSAGE A LA LIMITE : TRANSITION AVEC LA FORMULE DU CONTOUR CIRCULAIRE DE CAUCHY.

Lorsque le contour polygonal tend vers la circonférence, la formule (5) tend vers la formule de Cauchy (dans le cas du cercle)

$$(14) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)} dt$$

puisque le nombre complexe dt , représentant l'élément de tangente, est perpendiculaire au rayon. Il offre donc le caractère de symétrie rotatoire reconnu ci-dessus pour les γ_i . Pour mieux rapprocher les deux formules, on peut écrire (14) sous la forme :

$$(15) \quad f(z) = \int f(t) \beta(t) dt : \int \beta(t) dt$$

avec

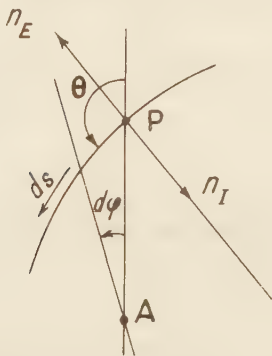
$$(16) \quad \int \beta(t) dt = \int_c \frac{dt}{t-z} = \text{Log}(t-z)_c = 2\pi i$$

La formule de Cauchy pour le cas du cercle représente donc une formule d'interpolation Lagrangienne particulière, dont le "diviseur" a un aspect très simple.

Nous allons examiner à présent comment la formule de Cauchy peut se prêter à un calcul numérique pour une valeur à l'intérieur du contour. On est ramené, comme prévu, à utiliser les formules classiques de Green et la formule de contour de Poisson.

TRANSFORMATION DE LA FORMULE DE CAUCHY POUR CE CALCUL

On part de la formule de Cauchy, valable pour un contour curviligne, fermé, quelconque, et un point, situé à l'intérieur.



$$(17) \quad (U+iV)_A = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{U+iV_{(P)}}{z-a} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma (-i) \frac{ds}{r} (\cos \theta + i \sin \theta) (U+iV)$$

$$(18) \quad = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma (-i) ds \left\{ \frac{d \log r}{ds} + i \frac{d \log r}{dn_E} \right\} (U+iV)$$

qu'on exprimera en partie réelle et en partie imaginaire.

Pour la partie réelle, on retire :

$$(19) \quad \dots \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left\{ \frac{d \log r}{dn_E} U + V \frac{d \log r}{ds} \right\} ds$$

d'où, en intégrant par parties :

$$(20) \quad \dots - \log r \frac{dV}{ds} \Big| ds$$

qui donne la formule de Green :

$$(21) \quad U = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left\{ \frac{d \log r}{dn_E} U - \log r \frac{dU}{dn_E} \right\} ds$$

Cette dernière formule étant valable encore pour un contour curviligne quelconque; dans le cas du contour circulaire, on parvient à la formule de Poisson :

$$(22) \quad \frac{1}{2\pi R} \int_c U_{(P)} \frac{R^2 - \rho^2}{r} ds = \frac{1}{2\pi R} \int U_\rho \frac{r'}{r} ds$$

(calcul analogue pour la partie imaginaire)

Les formules ci-dessus, en particulier (20) et (22) peuvent permettre le calcul numérique de $U_{(A)}$ et de $V_{(A)}$ d'après une distribution de valeurs connues, réparties par intervalles équidistants sur un contour circulaire.

Toutes les quantités intervenant dans les formules sont calculables numériquement ou tout au moins représentables par des expressions approchées avec une précision d'autant plus grande

1° qu'on dispose d'un plus grand nombre de points sur le contour

2° que la Variation de U et de V sur ce contour est plus étroite.

Quant à l'opération d'intégration, elle est représentable par une somme finie avec une précision qui est étudiée dans la théorie de la quadrature numérique.

On doit du reste tirer parti, dans cette question, du fait que les fonctions sous le signe $\int$:

$$U \frac{\cos \phi}{r}, \log r \frac{dV}{ds}$$

considérées comme fonctions de s, sont des fonctions périodiques, de période $2\pi R$.

Il apparaît donc comme naturel de chercher à introduire une représentation de ces fonctions sous le signe $\int$ en développements trigonométriques à la Fourier, avant toute intégration.

INTERVENTION DE L'ANALYSE HARMONIQUE COMME AUXILIAIRE NECESSAIRE DANS LES CALCULS NUMERIQUES.

Les intégrations de fonctions périodiques sur le contour circulaire apparaissent d'elles-mêmes quand on tire de la formule de Cauchy, la formule de Taylor par l'artifice du développement en série sous le signe somme :

$$(23) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-a} dz = f(0) + a \left[\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^2} dz \right] + a^2 \left[\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^3} dz \right] + \dots + a^n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right]$$

qui, transcrite en termes réels, équivaut à deux développements :

$$(24) \quad \begin{aligned} U(\rho, \theta) &= U_{(0)} + \rho (a_1 \cos \theta - b_1 \sin \theta) + \dots + \rho^n (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta) + \dots \\ V(\rho, \theta) &= V_{(0)} + \rho (b_1 \cos \theta + a_1 \sin \theta) + \dots + \rho^n (b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta) + \dots \end{aligned}$$

où les a_i et b_i sont les coefficients de Fourier des fonctions U et V sur le cercle $\rho = 1$ calculables par l'analyse harmonique.

La méthode suivie ci-dessus, à propos de l'intégrale du contour circulaire de Cauchy, sera employée plus loin au sujet de l'interpolation à nombres élevés de points de base, disposés sur des contours polygonaux particuliers (carrés concentriques dans une grille régulière).

Renonçant à poursuivre les calculs de formules de type Lagrangien, on mettra le polynôme d'interpolation sous la forme Taylorienne, et on utilisera les valeurs de base, régulièrement disposées, pour calculer les dérivées successives de la fonction complexe au point central, dérivées qui s'amortissent rapidement dans les cas usuels.

II. COMPOSITION DES INTERPOLATIONS

II. 1 — DÉMONSTRATION DE LA COMPOSITION DES INTERPOLATIONS LAGRANGIENNES.

Lemme. Aspect symétrique de la formule de Lagrange.

La formule fondamentale donnée en (1) et (2) ci-dessus peut revêtir la forme complètement symétrique :

$$(25) \quad \frac{y_x}{(x-a_1)\dots(x-a_p)} + \frac{y_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-x)} + \dots + \frac{y_p}{(a_p-a_1)\dots(a_p-a_{p-1})(a_p-x)} = 0$$

qui fait intervenir tous les "diviseurs" (1) obtenus en considérant successivement $x, a_1, \dots, a_i$ etc.. a_p comme étant l'entrée à calculer, les autres points du groupe jouant le rôle de base.

La formule (25) est une identité pour toute fonction y, polynôme de degré $p-1$ au plus par rapport à x. Elle est vraie en particulier pour $y = 1$, ce qui va être utile pour la suite. On a ainsi, pour 3 points,

$$(26) \quad \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} = 0$$

COMPOSITION DES INTERPOLATIONS LAGRANGIENNES.

On va reconnaître la propriété sur le cas le plus simple de l'interpolation en 3 points : cette interpolation équivaut à la composition, par interpolation linéaire, de deux interpolées linéaires. On généralise ensuite la propriété pour un ordre quelconque.

(1) Au sens défini § I, 1 page.

Démonstration.

Ecrivant la formule de l'interpolation à 3 points [a b c]

$$(27) \quad y(x)_{[abc]} = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} y_{(a)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} y_{(b)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} y_{(c)}$$

considérons les valeurs obtenues par interpolations à deux points [a b] et [b c]

$$(28) \quad y(x)_{[ab]} = \frac{(x-b)}{(a-b)} y_{(a)} + \frac{x-a}{b-a} y_{(b)}$$

$$(28 \text{ bis}) \quad y(x)_{[bc]} = \frac{x-c}{b-c} y_{(b)} + \frac{x-b}{c-b} y_{(c)}$$

D'après le théorème annoncé, la valeur $y(x)_{[abc]}$ peut s'obtenir en interpolant linéairement entre les deux valeurs ci-dessus, en considérant la première comme attachée à l'entrée a et la seconde comme attachée à l'entrée b, donc, selon la formule de l'interpolation linéaire :

$$(29) \quad y(x)_{[abc]} = \frac{x-c}{a-c} y(x)_{[ab]} + \frac{x-a}{c-a} y(x)_{[bc]}$$

Il faut justifier (29). La relation est évidemment vraie pour les coefficients de y_a et y_c . Pour le terme médian, en y_b , (29) donne :

$$\dots y_b (x-c)(x-a) \left[\frac{1}{(a-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(b-c)} \right] + \dots$$

et, en vertu du lemme précédent

$$y_b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \quad \text{coefficient écrit en (27)}$$

La démonstration se généralise pour p points.

"L'interpolée à p points peut s'obtenir en effectuant l'interpolation linéaire entre deux interpolées à p-1 points ayant p-2 points communs en considérant ces valeurs comme attachées à chacune des deux dernières entrées non communes."

Supposons qu'en effet aux trois entrées introduites ci-dessus on en ajoute de nouvelles

$$(a \ b \ c) \ d \ e \ f \dots l$$

l'interpolation à p points sera une formule à p termes dans laquelle on peut reconnaître les catégories ci-dessous :

Coefficients des points extrêmes, a et c.

Coefficients des points communs entre les deux interpolées à p-1 points qui sont

$$b \ d \ e \ f \dots l$$

On cherche à justifier la relation

$$(30) \quad y(x)_{[abcd\dots l]} = y(x)_{[abd\dots l]} \frac{x-c}{a-c} + y(x)_{[cbd\dots l]} \frac{x-a}{c-a}$$

Procédant à la justification de (30), élément par élément et disposant les formules comme précédemment, on constate l'existence de facteurs communs, tels que, pour le coefficient de y(b)

$$\frac{(x-d)(x-e)\dots(x-l)}{(b-d)(b-e)\dots(b-l)}$$

qui est en commun dans les trois formules intervenant dans (30). De telle sorte que la démonstration revient, comme plus haut, à vérifier des égalités du type :

$$\frac{1}{(a-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(b-c)} = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$$

qui résultent du lemme.

II. 2 — SUITE DES INTERPOLÉES. — EXPRESSION DE L'INTERPOLÉE PAR UNE SÉRIE LIMITÉE. — DIFFÉRENCES DIVISES.

Différences divisées

L'expression de Lagrange, symétrique, que nous avons écrite en (25) s'appelle différence divisée pour la base $x \ a_1 \ a_2 \dots a_p$. Pour la commodité, nous désignerons les points de base par des lettres successives de

l'alphabet, de manière à éviter les indices inutiles; des lettres capitales étant affectées aux valeurs de fonction pour ces points. Nous prenons donc les notations utilisées par ANDOYER (Mécanique Céleste, tome 2), on a ainsi :

$$(31) \quad \frac{-f(a)+f(b)}{-a+b} = \frac{-A+B}{-a+b} = (BA) = + \left\{ \frac{A}{a-b} + \frac{B}{b-a} \right\}$$

$$(32) \quad \frac{\frac{-f(a)+f(b)}{-a+b} + \frac{-f(a)+f(c)}{-a+c}}{-b+c} = \frac{-(BA) + (CA)}{-b+c} = (CBA) = + \left\{ \frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-c)(b-a)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)} \right\}$$

$$(33) \quad \frac{\frac{-f(b)+f(c)}{-b+c} + \frac{-f(b)+f(a)}{-b+a}}{-c+a} = \frac{-(CB) + (AB)}{-c+a} = (ACB)$$

On voit que l'opérateur est symétrique, et par conséquent ne se modifie pas lorsqu'on change l'ordre des lettres. On peut donc écrire sans erreur (AB)(ABC) etc..., pour les expressions ci-dessus. La formule générale d'une différence divise est donnée par l'expression (25) ci-dessus (différence divise $(X A_1 A_2 \dots A_p)$)

VERIFICATION DU THEOREME SUR LA COMPOSITION DES INTERPOLATIONS.

Au moyen des "différences divises", on peut rendre compte de l'interpolation Lagrangienne d'une manière très concise :

Placer un point nouveau (X, x) sur la parabole de degré $p-1$ définie par p points, c'est écrire que la différence divise du groupe des $(p+1)$ points comprenant (X, x) est nulle. C'est ainsi que l'interpolation linéaire s'écrit :

$$(34) \quad (ABX) = 0$$

et une interpolation à 4 points, (pour fixer les idées) s'écrit

$$(35) \quad (ABCDX) = 0$$

On va utiliser la définition de cette différence divise selon :

$$(ABCDX) = \frac{(ACDX) - (BCDX)}{a - b}$$

pour montrer la relation entre la valeur interpolée à 4 points X , et les interpolées d'ordre inférieur, à trois points, que nous appelons X_a et X_b respectivement. La différence divise étant une expression linéaire par rapport à la quantité X , on peut la mettre sous la forme

$$\alpha (X - \beta)$$

où β est la racine.

On a ainsi :

$$(36) \quad (ACDX) = \frac{1}{(x-a)(x-c)(x-d)} [X - X_a]$$

$$\text{et} \quad (BCDX) = \frac{1}{(x-b)(x-c)(x-d)} [X - X_b]$$

Si X_a , par hypothèse, est la valeur telle que $(X_a ACD) = 0$, et X_b , telle que $(X_b BCD) = 0$, l'équation qui fixe X par l'interpolation à 4 points peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$(37) \quad 0 = (ABCDX) = \frac{(ACDX) - (BCDX)}{a - b} = \frac{1}{a - b} \left[\frac{X - X_a}{(x-a)(x-c)(x-d)} - \frac{X - X_b}{(x-b)(x-c)(x-d)} \right]$$

$$(38) \quad = \frac{1}{(x-c)(x-d)} \frac{\frac{X - X_a}{x-a} - \frac{X - X_b}{x-b}}{a - b} = \frac{1}{(x-c)(x-d)} (X X_a X_b)$$

où l'on considère X_a et X_b comme attachés respectivement aux entrées a et b .

En définitive, $0 = (ABCDX)$ entraîne $(X X_a X_b) = 0$ qui signifie que X est interpolé linéairement entre X_a et X_b considérés comme attachés aux entrées a et b .

II. 3 — EXPRESSION DE L'INTERPOLÉE PAR UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ, SUITE DES INTERPOLÉES : COMPARAISON DES COEFFICIENTS LAGRANGIENS ET NEWTONIENS.

La présentation de l'interpolation Lagrangienne au moyen des différences divisées

$$(39) \quad y_{[abcdefg]}(x) = y + [A B] (x-a)(x-b) + [A B C] (x-a)(x-b)(x-c) + \dots + [A B C \dots F G] (x-a)(x-b) \dots (x-f)(x-g)$$

$$(40) \quad = \dots + \dots + \dots + \frac{(x-a)(x-b)\dots(x-f)}{(g-a)(g-b)\dots(g-f)} \left\{ y_{(g)} - y_{(g)}|_{[abcdf]} \right\}$$

offre l'avantage spécifique des formules par développement : on atteint le résultat exact au moyen d'une série de corrections de plus en plus petites. Elle fait apparaître, dans la dernière parenthèse, l'écart η_g entre la valeur donnée de la fonction au point g, et la valeur en ce point obtenue par l'interpolation à p-1 points (a b c f); le coefficient de η_g dans cette formule est évidemment le coefficient Lagrangien α_g .

Or, si les entrées sont rectilignes et équidistantes, l'écart η_g est égal à la différence Newtonienne de rang p et la formule s'identifie avec la formule classique de l'interpolation Newtonienne. On constate dès lors l'identité de chacun des coefficients successifs de cette formule Newtonienne avec le dernier coefficient a_i de la formule Lagrangienne attachée aux entrées introduites par le symbole de différence Newtonienne considérée :

Coefficient α_c , formule $\mathcal{L}_{abc}$, pour le symbole Δ_2

Coefficient α_d , formule $\mathcal{L}_{abcd}$, pour le symbole Δ_3

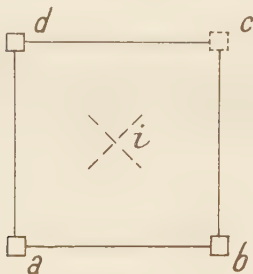
etc ...

Cette propriété rend service pour les interpolations du domaine réel, intervalles équidistants : les tables des coefficients de Lagrange (TABLES of LAGRANGIAN INTERPOLATION COEFFICIENTS, par LOWAN, New-York WPA 1944) fournissent en même temps les valeurs des coefficients Newtoniens.

La présentation de l'interpolation Lagrangienne sous forme d'un développement aux différences divisées sera mise à profit pour le domaine complexe (maille carrée) au Chapitre II, § 2 : 2,2, ci-après.

Etude du reste.

La précédente remarque intervient pour la discussion du reste de l'interpolation d'ordre p dans le domaine réel et complexe : ce reste pouvant, en effet, être assimilé, en première approximation, au premier terme négligé de la série de l'interpolation par différences divisées.



Ex : reste de l'interpolée à 3 points (a b d), au point i :

On compare à l'interpolée à 4 points (a b c d)

coefficient barycentrique = (0,25 ; 0)

$$\text{Ecart } \eta_c \left\{ \begin{array}{l} X_c - [X_a + (Y_d - Y_b)] \\ Y_c - [Y_a + (X_b - X_d)] \end{array} \right.$$

Reste au point i

$0,25 \cdot \eta_c$

EXTENSION : INTERPRETATION DE LA FORMULE D'EVERETT DU DOMAINE REEL.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{A} & & \text{B} & \times & \times' & \text{C} & \text{D} \\ \square & & \square & & \square & \square & \square \\ & & (\delta_o^2) & & & (\delta_1^2) & \end{array}$$

Formule d'Everett

$$y = x^0 y_0 + \frac{x^1 (x^2 - 1)}{3!} \delta_1^2 + \dots$$

Interpolée
linéaire
sur la "ligne" BC

Dans le domaine réel, on introduit des formules centrées, qui se signalent par leur rapidité de convergence.

La formule d'Everett est la formule Lagrangienne à base paire (2 pts., 4pts., 6pts., etc....) écrite d'une manière symétrique.

Les remarques ci-dessus s'appliquent à la formule d'Everett de la manière suivante :

Considérons, pour fixer les idées, la formule à 4 points A B C D et appelons η_a et η_b l'écart de valeurs vraies en ces points aux valeurs extrapolées sur la "ligne" B C; on aura, en appliquant le théorème sur la composition des interpolations et en utilisant les formules par différences divisées:

$$(41) \quad y(x)(ABCD) = y(x)(BC) + \frac{x-d}{a-d} \frac{x-b}{a-b} \frac{x-c}{a-c} \eta_a + \frac{x-a}{d-a} \frac{x-b}{d-b} \frac{x-c}{d-c} \eta_d$$

qui coïncide avec la formule d'Everett, comme on s'en assure aisément.

Cette formule se généralise et permet de rendre compte des corrections successives apportées quand on introduit les points de base par couples symétriques, conformément à la méthode des interpolations centrées.

Ayant constaté que les interpolées successives d'ordre croissant se déduisent les unes des autres par interpolations linéaires composées, il est intéressant de chercher les relations existant entre des interpolées d'ordre sensiblement différents, par exemple quelle relation lie les interpolées à 3 points (a b c) (b c d) (c d e) avec l'interpolée à 5 points (a b c d e). Déjà l'on connaît par la formule de Lagrange même, la relation qui existe entre les interpolées à 1 point (les valeurs données) et l'interpolée à p points.

On se place ici, il convient de le faire remarquer, dans l'hypothèse où l'ordre d'introduction des points successifs est défini au départ et conservé une fois pour toutes. Cet ordre est en principe arbitraire, par exemple on pourrait atteindre (a b c) par la voie [(a c) (c b)] $\rightarrow$ (a b c) ou [(a b) (b c)] $\rightarrow$ (a b c) mais on conçoit que la disposition particulière de chaque base du domaine réel ou du domaine complexe) suggère dans chaque cas un ordre à choisir de préférence. C'est ici que se fait, comme on sait, la distinction entre la formule de Newton et les formules de Gauss, ou d'Everett, pour le cas des intervalles équidistants, du domaine réel.

Pour rendre compte de la composition des interpolations des divers ordres dans une base fixée, on a dressé le tableau ci-après, en employant les conventions jugées les plus commodes pour cette étude.

Tableau des relations entre les interpolées successives

(a)	a b								
		(a b)							
	b a		a c						
(b)	b c			(a b c)					
		(b c)	c a		a d				
	c b		b d		d a	(a b c d)		a e	
(c)	c d			(b c d)					(a b c d e)
		(c d)	d b		b e		(b c d e)	e a	
			c e		e b				
(d)	d e			(c d e)					
		(d e)	e c						
	e d								
(e)									

Lecture du tableau

$$\begin{aligned}
 & (a b c) \quad a d \quad (a b c d) \quad \text{signifie :} \\
 & (b c d) \quad d a \\
 & (a b c) \frac{x-d}{a-d} + (b c d) \frac{x-a}{d-a} = (a b c d)
 \end{aligned}$$

Dans les liaisons entre les différents points de ce tableau on a systématiquement omis les facteurs tels que $(x-a)$, $(x-b)$ etc... puisqu'ils sont associables chacun à un dénominateur tel que $(b-a)(a-b)$ etc.... On a ainsi, comme exemple de lecture du tableau :

$$\begin{aligned}
 & (a) \quad a b \\
 & \quad (a b) \dots \text{signifiant} \quad (a b) = \frac{x-b}{a-b} (a) + \frac{x-a}{b-a} (b) \\
 & \quad b a \\
 & (b)
 \end{aligned}$$

Le tableau permet de suivre commodément les voies et les coefficients par lesquels une interpolée d'ordre quelconque (y compris l'ordre zéro, valeurs de base) intervient par interpolations linéaires successives pour former l'interpolée finale. En combinant ces coefficients, on obtient les coefficients barycentriques demandés.

Considérons par exemple la composition :

$$[(a b c)(b c d)(c d e)] \rightarrow (a b c d e)$$

le tableau montre que (a b c) et (c d e) interviennent par une seule voie chacun, mais que (b c d) intervient par deux voies différentes. La relation s'écrit explicitement :

$$(42) \quad (a b c) \alpha_i + (b c d) \alpha_j + (c d e) \alpha_k = (a b c d e)$$

ou encore :

$$(43) \quad [(abc)\beta_i + \dots \text{etc} \dots] / \sum \beta_i = (abcde)$$

avec :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_k \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{x-d}{a-d} \frac{x-e}{a-e} \\ \frac{x-a}{d-a} \frac{x-e}{b-e} + \frac{x-e}{a-e} \frac{x-a}{e-a} \\ \frac{x-b}{e-b} \frac{x-a}{e-a} \end{array}$$

$$1 / (a-d)(a-e) = \gamma_i ; \text{ etc } \dots$$

Si l'on met $(x-a)(x-b)(x-d)(x-e)$ en facteur commun, on obtient :

$$(abcde) = \frac{1}{\sum \beta_i} \left[\frac{\gamma_i}{(x-a)(x-b)} (abc) + \frac{\gamma_j}{(x-b)(x-d)} (bcd) + \frac{\gamma_k}{(x-d)(x-e)} (cde) \right]$$

formules offrant une grande analogie avec (5) et (6) du paragraphe I, 1.

Ainsi, il apparaît que les $\sum \gamma_i$ sont nécessairement nuls, puisque toute liaison écrite, telle que a b en haut et à droite et qui représente un $\frac{1}{a-b}$ est contre-balancée par une liaison opposée sur la même colonne.

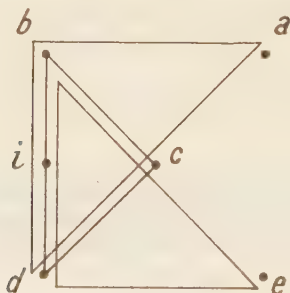
La propriété $\sum \gamma_i = 0$, vraie dans le domaine réel et complexe, rendra service si certains coefficients sont plus faciles à calculer que d'autres, ce qui est fréquent dans la pratique.

Pour le calcul des coefficients γ_i , la base rectiligne équidistante offre un intéressant cas de simplification. En effet, les modules des "liaisons", par colonne, sont égaux (1 unité dans la 1ère; 2, dans la 2e, etc...); le jeu des signes est tel que toutes les voies correspondant à un passage donné par exemple de c à $(abcde)$ ou de (bc) à $(abcd)$ additionnent leurs valeurs qui sont toutes égales d'après ce qui vient d'être dit. Il en résulte que les coefficients γ_i sont de signe alterné, proportionnels au nombre de voies, et qu'ainsi la suite des coefficients de Binôme intervient aussi bien pour les compositions d'interpolation que pour la formule de Lagrange même, d'où le tableau ci-dessous :

	(a b c d)		(b c d e)		
(γ_i)	- 1		+ 1		
	(a b c)		(b c d)	(c d e)	
(γ_i)	+ 1		- 2	+ 1	
etc...					
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
(γ_i)	+1	- 4	+ 6	- 4	+1

1° CAS DU DOMAINE COMPLEXE.

Soit à chercher les coefficients barycentriques correspondant à la composition des 3 interpolations à 3 points pour donner l'interpolation à 5 points $(abcde)$



abd bcd cde

On constitue le tableau de composition

(abd)			
	ca		
		(abcd)	
(bdc)	ac		ea
	ec		
		(bcde)	ae
(bde)	ce		
			(abcde)

On constate que les coefficients sont ceux-là mêmes de la formule d'interpolation de Lagrange à 3 points ace.

Pour calculer les coefficients barycentriques d'un point tel que i par rapport au groupe $abcde$, on calcule donc les coefficients dans les 3 groupes bda , bdc , bde , puis on les combine par les coefficients d'interpolation de i pour le groupe ace .

2° CALCUL DE VERIFICATION DANS LE TABLEAU.

La vérification des règles employées ci-dessus pour l'utilisation du tableau de composition peut être faite en cherchant à reconstituer par exemple les coefficients connus de la formule de Lagrange au moyen des interpolations linéaires composées.

C'est ce qui a été fait pour le b. L'addition des coefficients qui correspondent aux 4 voies possibles [pour aller jusqu'à (a b c d e)] donne bien le coefficient de Lagrange attendu.

Coefficients du point (b) par la composition d'interpolations linéaires

Coefficient a priori, formule de Lagrange

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{a-c} \cdot \frac{1}{a-d} \cdot \frac{1}{a-e} \\
 & + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{c-a} \cdot \frac{1}{a-d} \cdot \frac{1}{a-e} \\
 & + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{b-d} \cdot \frac{1}{d-a} \cdot \frac{1}{a-e} \\
 & + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{b-d} \cdot \frac{1}{b-e} \cdot \frac{1}{e-a} \\
 & + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{b-d} \cdot \frac{1}{b-e} \cdot \frac{1}{b-a}
 \end{aligned}$$

(Calculs auxiliaires)

$$\frac{1}{c-a} = \frac{1}{b-a} + \frac{b-c}{(c-a)(b-a)}$$

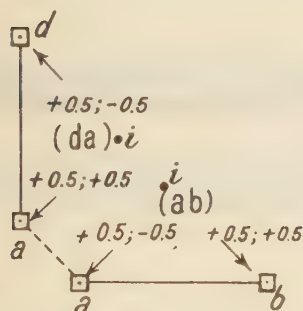
$$\frac{1}{d-a} = \frac{1}{b-a} + \frac{b-d}{(d-a)(b-a)}$$

$$\frac{1}{e-a} = \frac{1}{b-a} + \frac{(b-e)}{(e-a)(b-a)}$$

III. APPLICATIONS DE LA COMPOSITION DES INTERPOLATIONS

III. 1 — CALCULS DE COEFFICIENTS BARYCENTRIQUES D'INTERPOLATION POUR LA MAILLE CARRÉE.

Base à 3 points. Soit à calculer les coefficients Lagrangiens du point i (voir figure ci-dessous) dans la base a b d.



On connaît les coefficients de ce même point dans les interpolations linéaires de bases (a b) et (d a) respectivement.

Il suffit de se reporter à la formule d'interpolation linéaire du domaine réel; considérant la ligne de base (d a - puis a b) comme portant l'axe réel, les coefficients sont :

$$(44) \quad \underline{i} = \underline{d} \overline{IA} + \underline{a} \overline{DI} \quad (\text{qui généralise } y = y_0(1-n^*) + y_1 n)$$

on relève aussitôt, à vue directe, les composantes de $\overline{IA}$ et $\overline{DI}$. On a ainsi :

$$(\underline{d}, +0,5; -0,5) \quad (\underline{a}, +0,5; +0,5)$$

$$(\underline{a}, +0,5; -0,5) \quad (\underline{b}, +0,5; +0,5)$$

En appliquant l'opérateur d'interpolation linéaire du point i dans la base (d b), opérateur qui est évidemment :

$$(\underline{d}, +0,5; 0) \quad (\underline{b}, +0,5; 0)$$

on obtient le résultat demandé (voir figure ci-contre)

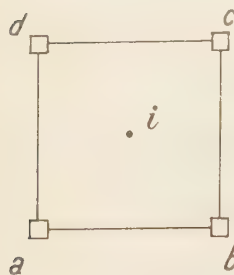
$$(\underline{d}, +0,25; -0,25) \quad (\underline{a}, +0,5; 0) \quad (\underline{b}, +0,25; +0,25)$$

On vérifie sur ce cas particulier que la somme des coefficients Lagrangiens doit être égale à $[+1, 0; 0]$

APPLICATION DE LA COMPOSITION SIMPLE (suite) : CAS DE LA BASE A 4 POINTS POUR LE MEME POINT CENTRAL, i .

Le résultat précédent relatif à la base triangulaire (abd) peut se combiner avec le résultat analogue correspondant à (bcd) pour donner l'interpolée à 4 points ($abcd$). Les coefficients de l'opérateur d'interpolation linéaire entre a et c sont évidemment $+0,5$; $+0,5$.

On va construire les coefficients barycentriques de i par rapport à $\underline{a}$ et $\underline{b}$ dans ($abcd$)



1° Résultats précédemment acquis :

(abd)	$(+0,5 \frac{a}{b}; 0)$	$(+0,25 \frac{b}{c}; -0,25)$	
(bcd)	0	$(+0,25; -0,25)$	

2° Interpolation linéaire :

(abd) $\rightarrow$ ($\underline{a}c$)	$(+0,50; 0)$
(bcd) $\rightarrow$ ($a\underline{c}$)	$(+0,50; 0)$

3° D'où :

($abcd$)	$(+0,25; 0)$	$(+0,25; 0)$	etc
------------	--------------	--------------	-----------

On retrouve, comme vérification, l'égalité des coefficients barycentriques de $\underline{a}$ et $\underline{b}$; égaux tous deux à $(0,25; 0)$. Ce résultat était à prévoir par raison de symétrie, et comme conséquence de l'étude des bases polygones réguliers. Les coefficients barycentriques indiqués alors, qui sont proportionnels à $\frac{a_i}{z - a_i}$ comme on a dit, sont réels et égaux, quand z vient à l'origine, pour tout polygone régulier, donc pour le carré.

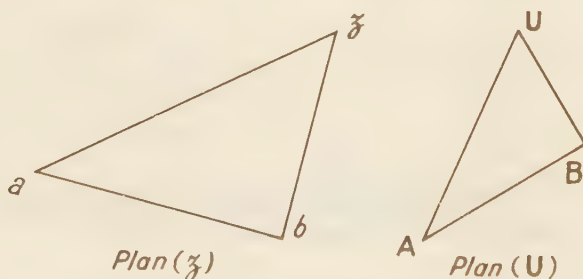
APPLICATION DE LA COMPOSITION GENERALE

Interpolation à 5 points; domaine complexe; maille carrée.

Une composition de trois interpolations paraboliques; selon le schéma ($abcde$) = (abc), (bcd), (bce) est utilisée au chapitre II, § II, 1, 3 ci-après, pour l'établissement des formules générales de sous tabulation binaire. Le lecteur est invité à s'y reporter comme exemple d'application.

III. 2 — COMPOSITION D'INTERPOLATIONS LINÉAIRES PAR VOIE GÉOMÉTRIQUE. — INTERPOLATION COMPLEXE PAR VOIE GRAPHIQUE DANS DES BASES D'ORDRE QUELCONQUE FORMANT DES DISPOSITIFS NON RÉGULIERS.

Il est à remarquer que dans le domaine complexe, l'interpolation linéaire fonction linéaire de z , est une transformation conforme par homothétie rotation, pouvant être réalisée graphiquement en formant, dans le plan de la fonction, un triangle (ABU) semblable à celui constitué par les entrées (abz) dans le plan de la variable.



Cette méthode de calcul graphique est intéressante dans les cas où l'on peut se contenter d'une précision relativement faible - ce qui est fréquent en Géodésie (problème de l'adaptation des systèmes triangulés) - et dans les autres techniques qui étudient des transformations conformes sur des données expérimentales.

Disposant de cette interprétation géométrique de l'interpolation linéaire et s'appuyant sur le résultat général relatif à la construction d'une interpolée Lagrangienne d'ordre p quelconque par compositions linéaires successives, on peut sans difficulté exécuter graphiquement la détermination d'un vecteur de déformation appuyé sur $p+1$ valeurs pour un point isolé sis à l'intérieur des points donnés.

En pratique, les points isolés formant la base définissent entre eux des triangles d'une même grandeur moyenne et, en vue du problème qui nous occupe, il suffit généralement de tenir compte pour un point isolé nouveau des seuls 3 points qui l'environnent le plus directement. Ceci revient à représenter la fonction inconnue par une série de fonctions du second degré qui se raccordent aux points de la base.

Néanmoins, lorsque le point isolé nouveau où l'on demande la valeur du vecteur déplacement se rapproche d'un des côtés des triangles mentionnés, il devient nécessaire par raison de symétrie de tenir compte de 4 points comme l'indique la figure ci-contre. L'on a alors l'occasion d'appliquer deux fois de suite la construction géométrique qui correspond au processus de composition des interpolations linéaires.

On voit facilement que l'opération s'applique à des vecteurs de plus en plus petits qui peuvent s'évanouir entièrement si la "déformation" est régulière, c'est-à-dire si l'hypothèse de la parabole du second degré est véritablement représentative du phénomène dans une région suffisamment étendue.

APPLICATION A L'ADAPTATION DES SYSTEMES DE COORDONNEES GEODESIQUES

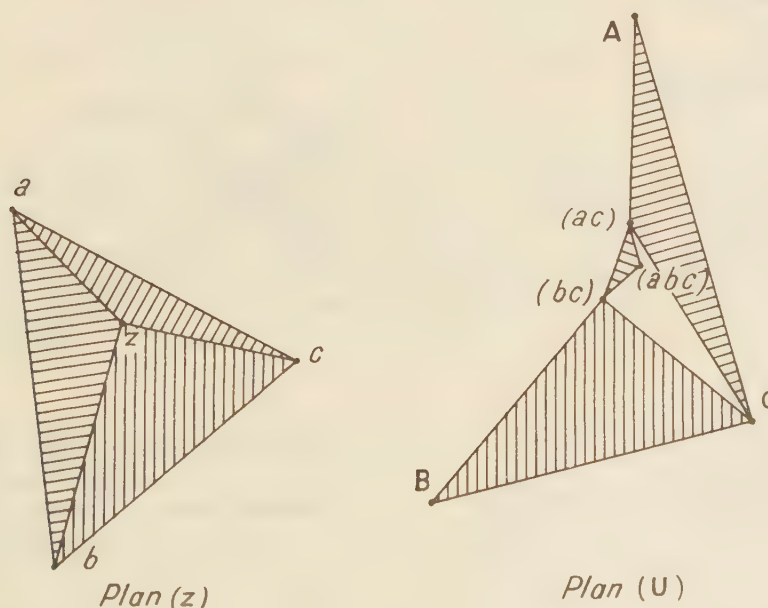
Une application utile de la méthode ci-dessus se rencontre en Géodésie à propos de l'adaptation des Réseaux de triangulation. Ceux-ci se présentent comme une succession de réseaux où l'on distingue, d'une part, la triangulation principale, mesurée avec la plus grande précision et calculée par les moindres carrés, et, d'autre part, une triangulation complémentaire appuyée sur celle-ci, formant un canevas nombreux et dense, calculée, soit par groupes de points reliés, soit par points isolés, et présentant elle-même des enchaînements et des hiérarchies successives dans son sein. Appelons a et b les listes de coordonnées correspondant respectivement à ces deux canevas, principal et complémentaire (ou secondaire).

Le problème de l'adaptation prend naissance dans le cas, assez fréquent en pratique, où le réseau principal a, par la suite, fait l'objet de mesures et de calculs nouveaux, de sorte que ses sommets ont reçu de nouvelles coordonnées (liste A), qui annulent celles de la liste précédente a. On demande alors à pouvoir calculer les nouvelles coordonnées complémentaires (liste B) en harmonie avec la liste A, sans procéder à une reprise générale des calculs de chaque point secondaire, et en respectant au mieux les relations géométriques existantes entre chaque point secondaire et les points principaux environnants.

Pratiquement, l'on résout le problème en formant aux points principaux les "vecteurs déplacements"

$$\Delta U = (\Delta X, \Delta Y) \quad [\Delta = \text{différence liste A - liste a}]$$

et en interpolant leurs valeurs pour les sommets du réseau secondaire. On comprend que si le procédé d'interpolation employé correspond à une transformation conforme, on respectera au mieux les figures géométriques résultant du premier calcul de la triangulation secondaire.



Exemple de réalisation graphique d'une interpolation parabolique à 3 points dans le domaine complexe

Or, l'interpolation Lagrangienne complexe permet de réaliser une telle transformation assujettie à vérifier des valeurs données ΔU aux points principaux. Cette transformation conforme $U=f(z)$ se traduit au voisinage immédiat d'un point par une transformation d'homothétie rotation (figures infinitésimales) et une transformation de triangles rectilignes en triangles curvilignes, appliquée aux figures finies; les angles des triangles de dimensions finies ne pouvant pas être rigoureusement respectés dans une telle adaptation. On vérifie que les perturbations apportées aux angles de figures situées à l'intérieur du polygone d'adaptation sont généralement inférieures aux perturbations reçues par les côtés de ce polygone lui-même = distribution des perturbations qui est acceptable pratiquement, étant donné que le polygone directeur est mesuré avec une précision supérieure à celle des figures internes.

L'interpolation Lagrangienne du domaine complexe est particulièrement recommandée pour traiter le problème, parce que d'une part, elle fournit une représentation conforme d'un système sur l'autre; d'autre part, parce qu'elle est automatique en quelque sorte et permet d'introduire les points circumvoisins successivement dans l'ordre de leurs distances; enfin, parce qu'elle est progressive, le processus pouvant s'arrêter dès qu'on parvient à la stabilisation des valeurs, ou, au contraire, se prolonger si l'on juge indispensable de tenir compte de points connus supplémentaires.

Donc, si l'interpolation Lagrangienne complexe convient théoriquement à la solution de la question, il est du moins nécessaire de l'appliquer sous une forme aussi simplifiée que possible : tenant compte du fait que les vecteurs "déplacement" ou vecteurs "d'adaptation" étant normalement assez petits (de l'ordre de 1m), la précision relative recherchée est au plus de 1 %, on peut employer avantageusement une solution graphique. On utilise la méthode de combinaison de triangles précédemment décrite (voir figure ci-contre), ou une variante semi-graphique décrite ci-après, qui a l'avantage de permettre de suivre de proche en proche la déformation (changement d'échelle - rotation finie) imposée au système.

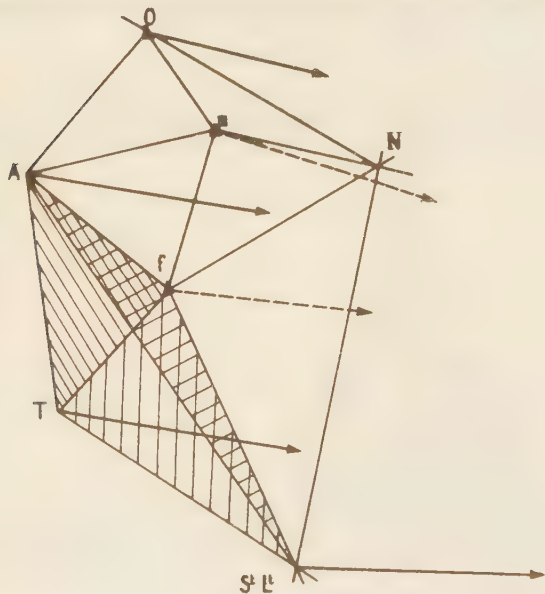
VARIANTE SEMI-GRAPHIQUE, UTILE DANS LA DISCUSSION DES ADAPTATIONS GEODESIQUES : INTERPOLATION SUR LES FACTEURS D'HOMOTHETIE ROTATION ("PENTES" COMPLEXES)

Dans les adaptations géodésiques, le coefficient d'homothétie rotation (paramètre α de la formule $U(z) = U_0 + \alpha z$) présente un intérêt particulier parce qu'il figure des réalités physiques importantes pour le réseau considéré (changement d'échelle, changement d'orientation).

Il est donc intéressant de mettre ses variations en évidence, en même temps qu'on exécute le processus d'interpolation complexe. On y parvient en remarquant que les "pentes" complexes relatives à un groupe de $p+2$ "points" donnés, ABC L (rattachés à un même "point" 0)

$$\frac{\Delta U_A}{\Delta z_A} = \frac{U_A - U_0}{a - 0} \quad \frac{\Delta U_B}{\Delta z_B} = \frac{U_B - U_0}{b - 0} , \text{ etc}$$

sont en "interpolation" d'ordre p , si les "points" eux-mêmes sont "en interpolation" d'ordre $p+1$.



Points d'appui O, A, T, S, L, N
Points à traiter f, N,

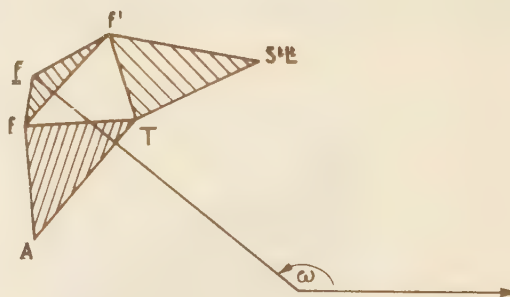


Diagramme auxiliaire de $\frac{\Delta U}{\Delta z}$, le point N étant pris comme origine.
Exemple ci dessus : obtention de $\frac{\Delta U}{\Delta z}(f)$ par interpolation à 3 points.

On peut donc procéder aux interpolations graphiques par la voie décrite plus haut, dans le plan complexe des quantités $\frac{\Delta U}{\Delta z}$ (rattachées au point 0).

On est obligé d'employer le calcul pour construire ces nombres $\frac{\Delta U}{\Delta z}$ en particulier pour

$$\left| \frac{\Delta U}{\Delta z} \right| = \left| \frac{\Delta U}{\Delta z} \right|$$

Moyennant cela, la méthode fournit un utile contrôle de la déformation du réseau. Elle peut se recommander surtout si l'on a un dispositif comme ci-contre, avec un point central, auquel on attribuera naturellement le rôle de pivot pour la définition des nombres $\frac{\Delta U}{\Delta z}$.

IV. ÉTUDE DE LA FORMULE DU RESTE DE LAGRANGE POUR LES CAS DE LA PRATIQUE USUELLE

On doit à M. Paul Montel (référence (1) de la Bibliographie, 1ère Partie) un énoncé général sur le reste de la formule d'interpolation; il énonce que la différence divise d'ordre $p+1$ est égale à

$$\frac{1}{(p+1)!} U^{(p+1)}(\theta)$$

cette valeur U_{p+1} représentant, dans le plan de la dérivée $p+1$ de $U(z)$ un point du domaine de convexité correspondant à l'ensemble des valeurs de $f^{(p+1)}_{(z)}$ quand z décrit son domaine de définition.

Or il est bon de signaler que dans l'hypothèse du présent travail, la formule de l'approximation par polynôme d'interpolation fait apparaître une expression du reste plus simplement définie que celle de M. MONTEL. En effet, les fonctions $U(z)$ étudiées ci-après sont représentables par des développements en série très rapidement convergents, dont on peut donner la description qualitative suivante : dans leur expression, se trouve au rang p un terme qui apporte encore une contribution numérique appréciable (dans l'unité choisie pour U), celle du terme de rang $p+1$ étant, en revanche, d'un ordre au plus égal à la dernière unité écrite, et tous les termes ultérieurs de rang $> p+2$ étant pratiquement sans effet.

Dès lors, si l'on cherche à représenter $U(z)$ par un polynôme d'interpolation de degré p , cela revient en fait à étudier l'approximation d'un polynôme de degré $(p+1)$ ou $(p+2)$ au moyen d'une formule de degré p exacte en $p+1$ points. Dans la formule de l'interpolation à $p+1$ points

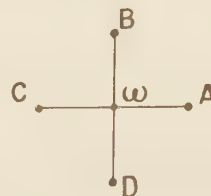
$$U(z) = f(a) + (z-a) [AB] + (z-a)(z-b) [ABC] + \dots + \\ + (z-a)(z-b) \dots (z-i) [ABC \dots IL] + (z-a)(z-b) \dots (z-i)(z-l) \frac{U^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!}$$

qui peut s'écrire plus brièvement avec le symbole de différences divises

$$(44) \quad [Z \ ABC \dots IL] = \frac{U^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!}$$

la dérivée qui apparaît est, soit une fonction constante, connue immédiatement, soit une fonction linéaire; et dans ce cas, on peut très facilement montrer, par la même démonstration qui donne naissance à la formule d'interpolation, que le point θ est le barycentre du groupe des $p+2$ points (ZA — IL).

Ce résultat, utile pour l'estimation du reste de l'interpolation, peut, réciproquement, rendre grand service pour l'estimation des dérivées, et l'on peut même dire que sur lui repose, en variables réelles comme en variables complexes, toute la technique de la dérivation numérique.



Enonçons des aspects bien connus :

- La différence divise première $[AB]$ donne la valeur de la (dérivée/1!) de $y(x)$ [ou $U(z)$] au point milieu de AB , si la fonction y (ou U) est du 2ème degré.

- Si on considère 3 points équidistants $[ABC]$ leur différence divise $[ABC]$ donne la valeur de la (dérivée 2ème/2!) au point B, si la fonction est au plus du 3ème degré.

Dans l'étude, faite au Chapitre II ci-après, des formules de dérivation numérique complexe (voir notamment § 5), on rencontre de nouveaux exemples comme ceux-ci :

(dérivée troisième/3!) en ω , centre d'un groupe de 4 points en carré = différence divise $[ABCD]$ (si U est de degré < 4)

(dérivée quatrième/4!) en ω : différence divise $[ABCD \omega]$ (si U est de degré < 5)

On obtient ainsi une vue synthétique sur la signification des formules d'une part, et, d'autre part, on relie les calculs du Chapitre II à ceux du Chapitre I concernant les différences divises et les formules lagrangiennes dans les polygones réguliers.

Il est important d'observer, toutefois, que les limitations de degré ci-dessus sont trop restrictives. Les calculs effectués au Chapitre II vont montrer en effet que ces expressions des dérivées 3ème et 4ème restent justes si U est de degré < 7 ou < 8 , respectivement. Cette propriété dans le domaine complexe est due à la disposition étoilée de ces bases et se rapproche des idées classiques de l'analyse harmonique.

CHAPITRE II

MÉTHODES D'INTERPOLATION NUMÉRIQUE DANS LA MAILLE CARRÉE

INTRODUCTION

Le présent chapitre a pour objet la construction et l'emploi de tables numériques complexes, supposées définies au départ par la donnée de points de base en nombre restreint, obtenus par des calculs indépendants, ou par voie expérimentale.

Il s'agit d'énoncer des méthodes et des formules facilement utilisables par des calculateurs, et susceptibles d'apporter une économie substantielle de travail par rapport à l'utilisation des formules directes de définition de $U(z)$.

Les éléments rassemblés au Chapitre I sur l'interpolation lagrangienne sont amplement utilisés ici, mais l'aspect carré de la grille crée des conditions spéciales, les formules précédentes se simplifiant nettement, et d'autres méthodes de calcul très semblables à celles de l'analyse harmonique pouvant leur être même substituées avec avantage.

Après une récapitulation préliminaire des formules utiles, on traite en premier lieu de la sous-tabulation qui consiste à construire, à partir des points de base, une grille sous-multiple à densité arbitraire. On peut, d'une part, procéder par bipartitions successives ("sous-tabulation binaire") : méthode très économique pour le calculateur, puisqu'elle utilise principalement la formule à 4 points qui se réduit à une simple moyenne, et, auxiliairement, des formules canoniques de bipartition des côtés de mailles.

La sous-tabulation peut aussi s'effectuer par fractionnement décimal des mailles initiales, en utilisant des tables de coefficients d'interpolation, précalculées. Cette méthode peut présenter un grand intérêt dans certains cas, par exemple lorsque des calculs de points isolés sont demandés avec une grande densité, dans un secteur restreint.

On peut, avec ces tables, réaliser rapidement un encadrement de la zone de travail réduite, ou la formule d'interpolation linéaire peut suffire. Ces tables construites pour les bases à 3 ou 4 points, sont dues à des auteurs précédents dont il a semblé bon de signaler la contribution à ce propos.

Lorsque la grille carrée a atteint un resserrement suffisant, elle se prête à l'approximation numérique de $U(z)$ par des polynômes de degré deux ou un, bien adaptés au calcul de points "isolés" (c'est-à-dire : calculs de $U(z)$ pour des valeurs quelconques de l'argument z).

On étudie diverses manières d'effectuer cette interpolation dans la table d'usage. Les formules proposées sont des formules interpolantes à 3 points, ou des formules de meilleure approximation sur 4 points : ce sont des considérations pratiques qui déterminent le choix des formules.

Les formules de travail sont mises uniformément sous l'aspect du développement ordonné, polynomial, le plus pratique pour les calculs en nombres complexes. Les coefficients s'obtiennent par des combinaisons simples, à partir des différences habituelles (horizontales, verticales ou diagonales) fournies dans la grille. Des critères simples permettent, pour chaque formule d'interpolation, l'estimation de l'erreur commise, cette estimation se faisant en même temps que la formation des coefficients eux-mêmes.

On donne un exemple numérique incorporant les diverses formules, et proposant des dispositions commodées pour la présentation des tables d'usage, en y faisant figurer les divers éléments utiles à la formation des coefficients.

I. MAILLE CARRÉE, PRÉLIMINAIRES

On rassemble ci-dessous divers éléments connus utiles pour la suite.

I. 1 — TABLEAU DES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION COMPLEXE.

RELATIONS DE CAUCHY RIEMANN ET RELATIONS DERIVEES

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dX + idY}{dx + idy} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} \end{cases}$$

Composantes
X et Y de la
dérivée 1ère

$$\frac{d^2 U}{dz^2} \quad \text{Obtenu par les opérateurs précédents, appliqués aux expressions trouvées des Composantes de : } \frac{dU}{dz} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \end{cases}$$

- d° -
dérivée 2ème

$$(1) \quad \frac{d^3 U}{dz^3} \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 Y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 Y}{\partial x \partial y \partial x} = -\frac{\partial^3 X}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 Y}{\partial y \partial x^2} = -\frac{\partial^3 X}{\partial y \partial x \partial y} = -\frac{\partial^3 X}{\partial y^2 \partial x} = -\frac{\partial^3 Y}{\partial y^3} \\ \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = -\frac{\partial^3 X}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\partial^3 X}{x \partial y \partial x} = -\frac{\partial^3 Y}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 X}{\partial y \partial x^2} = -\frac{\partial^3 Y}{\partial y \partial x \partial y} = -\frac{\partial^3 Y}{\partial y^2 \partial x} = -\frac{\partial^3 X}{\partial y^3} \end{cases}$$

- d° -
dérivée 3ème

I. 2 — RAPPEL DES FORMULES DONNANT LES DÉRIVÉES EN FONCTION DES DIFFÉRENCES CENTRALES (FONCTIONS D'UNE VARIABLE).

$$(2) \quad \begin{aligned} D &= \frac{\delta^{-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{1}{6} \frac{\delta^{-\frac{3}{2}} + \delta^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{1}{30} \frac{\delta^{-\frac{5}{2}} + \delta^{\frac{5}{2}}}{2} \\ D^2 &= \delta_0^2 - \frac{1}{12} \delta_0^4 + \frac{1}{90} \delta_0^6 \\ D^3 &= \frac{\delta^{-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{1}{4} \frac{\delta^{-\frac{3}{2}} + \delta^{\frac{5}{2}}}{2} \\ D^4 &= \delta_0^4 - \frac{1}{6} \delta_0^6 \quad \text{etc} \end{aligned}$$

Ces formules s'obtiennent par application du calcul symbolique des opérateurs de différence. On trouve des extensions de ce calcul symbolique à deux variables chez Bickley (bibliographie) et dans les travaux de M. Henri Mineur pour l'interpolation et l'intégration numérique.

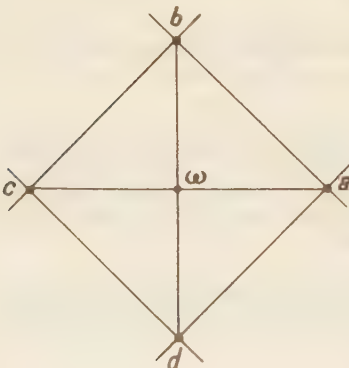
I. 3 — VALEURS NUMÉRIQUES PRISES PAR UN POLYNOME COMPLEXE AUX SOMMETS D'UN DISPOSITIF CARRÉ CENTRÉ. — ANALYSE DES TERMES SUCCESSIFS.

Considérant a priori un polynome complexe

$$U(z) = U_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$$

en se limitant d'abord au degré 4, les valeurs prises par U aux cinq points de la figure ci-contre (dispositif en croix avec son centre) permettent de déterminer tous les coefficients selon la méthode de l'analyse harmonique. On note ces valeurs U_ω , U_a , U_b , U_c , U_d ou U_ω et U_i et les affixes complexes des vecteurs ω , a , b , c , d ... sont, de même, notés z_i . On forme donc les sommes

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_i U_i z_i^p &\rightarrow a_p \\ \frac{1}{4} \sum_i U_i z_i^4 - U_\omega &= a_4 \end{aligned} \quad (1 \dots p \dots 4)$$



où les z_i^p , puissances successives des racines quatrièmes de l'unité, jouissent des propriétés d'orthogonalité bien connues

$$\frac{1}{4} \sum_i z_i^p = \begin{cases} 1 \text{ pour } p = 0 \text{ ou } 4 \\ \text{zéro aux cas contraires} \end{cases}$$

Dans les tableaux (3) ci-dessous, on forme en termes réels les combinaisons de valeurs qui permettent d'isoler les coefficients successifs du polynôme. X et Y sont les composantes de U ; α , β , les composantes de a , γ , δ , celles de a_2 et ainsi de suite.

On a d'abord des combinaisons "primaires"

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \textcircled{1} & \frac{1}{2} (X_a - X_c) = \alpha + \varepsilon \\ \textcircled{2} & \frac{1}{2} (Y_b - Y_d) = \alpha - \varepsilon \\ \textcircled{5} & \frac{1}{2} (X_a - 2X_\omega + X_c) = \gamma + \lambda \\ \textcircled{6} & \frac{1}{2} (X_b - 2X_\omega + X_d) = -\gamma + \lambda \\ \textcircled{3} & \frac{1}{2} (Y_a - Y_c) = \beta + \eta \\ \textcircled{4} & \frac{1}{2} (X_d - X_b) = \beta - \eta \\ \textcircled{7} & \frac{1}{2} (Y_a - 2Y_\omega + Y_c) = \delta + \mu \\ \textcircled{8} & \frac{1}{2} (Y_b - 2Y_\omega + Y_d) = -\delta + \mu \end{array}$$

qui séparent les coefficients des degrés pairs (0, 2, 4) des coefficients de degrés impairs (1 et 3).

Puis les combinaisons de celles-ci deux à deux par sommes et différences fournissent séparément les coefficients des degrés 1 et 3, 2 et 4 :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{9} & \alpha = \frac{1}{2} \{ \textcircled{1} + \textcircled{2} \} \quad \textcircled{11} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \{ \textcircled{1} - \textcircled{2} \} \quad \textcircled{13} \quad \gamma = \frac{1}{2} \{ \textcircled{5} - \textcircled{6} \} \quad \textcircled{15} \quad \lambda = \frac{1}{2} \{ \textcircled{5} + \textcircled{6} \} \\ \textcircled{10} & \beta = \frac{1}{2} \{ \textcircled{3} + \textcircled{4} \} \quad \textcircled{12} \quad \eta = \frac{1}{2} \{ \textcircled{3} - \textcircled{4} \} \quad \textcircled{14} \quad \delta = \frac{1}{2} \{ \textcircled{7} - \textcircled{8} \} \quad \textcircled{16} \quad \mu = \frac{1}{2} \{ \textcircled{7} + \textcircled{8} \} \end{array}$$

On retrouve ainsi les coefficients du 4° degré, dont les composantes sont fournies par le reste de l'algorithme de Liebman :

$$\begin{array}{l} \textcircled{15} \\ \textcircled{16} \end{array} \quad a_4 \left\{ \begin{array}{l} \lambda \\ \mu \end{array} \right. = \frac{1}{4} \begin{array}{l} \sum X_a - 4X_\omega \\ \sum Y_a - 4Y_\omega \end{array} = \begin{array}{l} \mathcal{L}_{+(\omega)} X \\ \mathcal{L}_{+(\omega)} Y \end{array}$$

en introduisant la notation $\mathcal{L}$ pour cet opérateur important.

ANALYSE DES TERMES DE DEGRE SUPERIEUR AU 4°, A L'AIDE DE NOUVEAUX GROUPES CARRES EXTERIEURS, PRELEVES DANS LA MEME GRILLE

Si l'on écrivait les combinaisons ci-dessus en tenant compte de termes de degré supérieur à 4 (par exemple a_5 , de composantes v et o , a_6 etc...), l'on trouverait les composantes de a_5 associées à celles de a_1 dans les combinaisons, donc $\textcircled{9}$ et $\textcircled{10}$ donneraient respectivement $\alpha + v$ et $\beta + o$, celles de a_6 associées à celles de a_2 dans les combinaisons $\textcircled{11}$ et $\textcircled{12}$ et ainsi de suite.

Pour dissocier ces coefficients a_i et a_{i+4} (a_{i+2+4} , a_{i+k+4} etc...), il suffit d'introduire les combinaisons semblables aux précédentes mais fournies avec d'autres carrés concentriques au premier, et de rayon plus grand, qui se reconnaissent facilement dans la grille (voir figure).

Il est évident que la connaissance de 9 points de valeurs numériques X, Y, connues, permet de déterminer les coefficients du polynôme du degré zéro (0) au degré huit (8) inclus.

Dans les combinaisons primaires et secondaires ci-dessus fournies pour le 1er carré intérieur (symbole +) sont apparus des groupes tels que :

$$a_1 + a_5 \quad a_2 + a_6 \quad a_3 + a_7 \quad a_4 + a_8$$

les sommets de ce carré correspondant à des affixes de module 1, racines 4° de l'unité.

Les mêmes combinaisons, appliquées au carré extérieur (symbole X) dont les sommets correspondent à des affixes qui sont racines 4ème de moins 4, font apparaître des groupes :

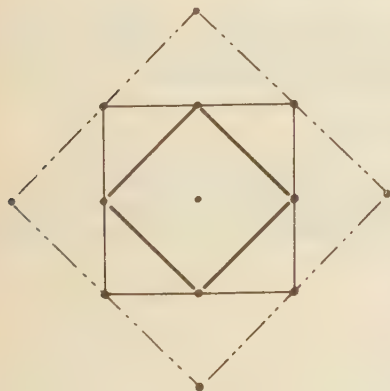
$$a_1 - 4a_5, \quad a_2 - 4a_6, \quad a_3 - 4a_7, \quad a_4 - 4a_8$$

On reconnaît immédiatement quelles combinaisons linéaires il faut appliquer pour dissocier les termes.

Exemple pour le calcul du 9ème coefficient (dérivée d'ordre 8)

On aura, avec la croix droite de rayon unité

$$\mathcal{L}_+ = 0,25 \sum U_a - U_i = a_4 + a_8$$



et dans la croix de Saint André (croix diagonale) de rayon $\sqrt{2}$

$$\hat{\mathcal{L}}_x = 0,25 \sum U_e - U_i = -4 (a_4 - 4a_8)$$

d'où :

$$a_4 = \frac{\hat{\mathcal{L}}_x - 16 \hat{\mathcal{L}}_8}{-20} ; \dots \quad a_8 = \frac{\hat{\mathcal{L}}_x + 4 \hat{\mathcal{L}}_8}{20}$$

La dernière relation est une vérification très sensible pour l'exactitude d'une grille carrée ne contenant pas de terme du 8ème ordre.

$$(4) \quad \hat{\mathcal{L}}_x + 4 \hat{\mathcal{L}}_8 = 0$$

En poursuivant ce procédé, on introduirait le carré suivant, emboîté sur les précédents et de rayon deux, qui permettrait de séparer les dérivées jusqu'à l'ordre 12. On retrouve ainsi des formules obtenues par BICKLEY (voir bibliographie 8).

Dans la pratique on a rarement besoin de pousser l'analyse au delà du degré 4. La 2ème partie du présent mémoire fournira l'exemple de fonctions mathématiques qui sont parfaitement approchées sur des champs étendus par leur approximation du 4ème degré. La nécessité d'analyses plus fines pourrait se concevoir dans d'autres techniques, par exemple en hydrodynamique pour l'étude d'écoulements dans des ajutages irréguliers, à supposer toutefois que l'introduction des termes de degré élevé puisse améliorer de façon vraiment effective des valeurs numériques destinées à être confrontées à des mesures physiques, elle ne saurait, en tout état de cause, rendre compte utilement des singularités mathématiques éventuelles, telles que pôles ou autres.

I. 4 — FORMULES DE CHANGEMENT D'UNITÉ : PASSAGE DES AXES « DIAGONAUX » AUX AXES « NORMAUX ».

Si l'on dispose des coefficients d'une formule représentant la fonction $U(z)$, le plan des z étant quadrillé par une certaine "grille" qui définit la direction des axes et l'unité de longueur il est utile de pouvoir rapidement calculer les nouveaux coefficients de la formule algébrique transformée après un changement de variable linéaire sur z .

Un exemple important pour la suite, est celui où une grille carrée est envisagée comme définissant d'abord le système d'axe orienté et mis à l'échelle sur des diagonales (plan z') puis le système d'axes "normal", orienté et mis à l'échelle sur les côtés des mailles (plan z) :

On a ici :

$$\text{Représentation polaire} \\ z = z' \times \sqrt{2} \times e^{+i\pi/4} = z' (\sqrt{2} ; \pi/4)$$

Certaines expressions des dérivées (coefficients des formules) sont évidentes dans le système d'axes z' , on prend cet intermédiaire et l'on déduit les expressions dans le plan z par les formules du changement de variable établies ci-dessous.

On peut raisonner comme il suit : écrivant les formules dans les deux systèmes

$$U = U_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \dots + a_n \cdot z^n + \dots \\ = U'_0 + a'_1 \cdot z' + a'_2 \cdot z'^2 + \dots + a'_n \cdot z'^n + \dots$$

... pour assurer l'invariance du résultat, il est nécessaire que les coefficients a et a' présentent les relations inverses de celles entre les z' et z'' , c'est-à-dire pour le cas particulier envisagé :

$$(5) \quad \underbrace{a_1 = a'_1 (1/\sqrt{2} ; -\pi/4)}_{\text{Représentation polaire}} \quad \underbrace{a_2 = a'_2 (1/2 ; -\pi/2) \dots \text{etc} \dots}_{\text{Représentation polaire}}$$

On pourra utiliser la notation symbolique d ou D (abréviation de "diagonale")

$$(5) \quad \begin{array}{lll} z = D \cdot z' & z' = d \cdot z & a_1 = d \cdot a'_1 \\ z^2 = D \cdot z'^2 & z'^2 = d^2 \cdot z^2 & a_2 = d \cdot a'_2 \quad \text{etc} \dots \end{array}$$

etc...., avec le tableau des coefficients de passage

$$(6) \quad \begin{array}{ll} D \dots (+1 ; +1) & d = \dots (+0,5 ; -0,5) \\ D^2 \dots (0 ; +2) & d^2 = \dots (0 ; -0,5) \\ D^3 \dots (-2 ; +2) & d^3 = \dots (-0,25 ; -0,25) \quad \text{etc} \dots \end{array}$$

qui donne en particulier pour les composantes α et β du premier coefficient a_1 , les formules de passage :

$$(7) \quad \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \dots (0,5 ; -0,5) (\alpha'; \beta') = \begin{matrix} 0,5 \alpha' + 0,5 \beta' \\ -0,5 \alpha' + 0,5 \beta' \end{matrix}$$

et pour les composantes γ et δ du 2° coefficient a_2

$$(8) \quad \begin{matrix} \gamma \\ \delta \end{matrix} \dots (0 ; -0,5) (\gamma'; \delta') = \begin{matrix} 0,5 \delta' \\ -0,5 \gamma' \end{matrix}$$

formules dont il sera fait usage ci-dessous au paragraphe 5.

I. 5 — APPLICATION : FORMULES D'USAGE POUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES COMPLEXES D'APRÈS UNE GRILLE CARRÉE.

Associant entre elles les formules des paragraphes 1 et 2 ci-dessus et tenant compte des remarques du paragraphe 3, on établit les formules pratiques pour déduire les dérivées complexes d'après une grille carrée, en utilisant les bases en croix ou en carré comme l'indiquent les figures respectives.

Les applications de la pratique usuelle font apparaître d'ordinaire des bases en carré, mais les bases en croix sont plus commodes pour le calcul des coefficients du développement complexe et peuvent donc être fort utiles comme intermédiaires en recourant pour cela aux formules de changement de variable du paragraphe 4.

Le lecteur comprend que ces deux aspects d'une même base sont distingués ici pour les seuls besoins du praticien, auquel on veut donner des formules directement exploitables aux calculs numériques.

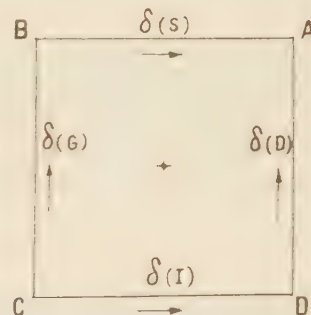
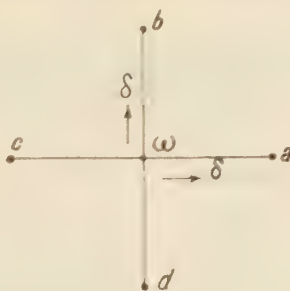
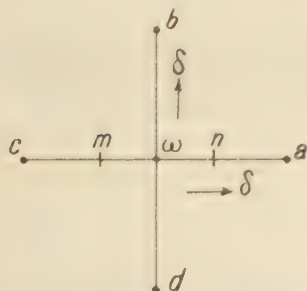
N.B. On introduit ici le symbole δ indiquant une différence finie, centrée, rapportée à l'intervalle unité, la flèche indiquant la direction d'axe le long duquel la différence est prise.

Exemples :

$$\rightarrow \delta_{\omega} (X) = \frac{1}{2}(X_a - X_c) \quad \delta_{\omega \uparrow} (Y) = \frac{1}{2}(Y_b - Y_d)$$

et aussi

$$\rightarrow \delta_{\omega}^2 (X) = \delta_n - \delta_m = (X_a - X_{\omega}) - (X_{\omega} - X_c) = X_a - 2X_{\omega} + X_c$$



DERIVEE PREMIERE : SCHEMA EN CROIX

La comparaison

$$\delta_{\omega} [U] > < \delta_{\omega \uparrow} (iU)$$

détecte la présence d'un terme du 3ème degré. La dérivée première au point ω est donnée par la moyenne des deux termes :

$$(9) \quad \frac{1}{2} \left[\delta_{\omega} (U) + \delta_{\omega \uparrow} \frac{U}{i} \right] = \frac{dU}{dz} (\omega)$$

SCHEMA EN CARRE :

Raisonnement dans le système d'axes "diagonal" au moyen de la formule (9) ci-dessus, puis revenir aux axes normaux par changement de variable formule (7)

$$a_1 = \begin{cases} \alpha = + \frac{1}{2} (\alpha' + \beta') = \\ \quad = \frac{1}{4} (X_A - X_C + Y_B - Y_D + Y_A - Y_C - X_B + X_D) \\ \beta = + \frac{1}{2} (\alpha' - \beta') = \\ \quad = \frac{1}{4} (-X_A + X_C - Y_B + Y_D + Y_A - Y_C - X_B + X_D) \end{cases}$$

Ce résultat s'interprète par analogie avec (9) ci-dessus, les différences centrées passant par ω étant remplacées par les moyennes de différences sur les côtés du carré

$$(10) \quad a_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\delta_{\rightarrow}(s) + \delta_{\uparrow}(i) \right] (U) + \frac{1}{2} \left[\delta_{\uparrow}(G) + \delta_{\rightarrow}(D) \right] \frac{(U)}{i} \right\}$$

DERIVEE SECONDE : SCHEMA EN CROIX AVEC CENTRE

En l'absence d'un terme du 4ème degré dans la fonction U, la dérivée seconde complexe s'obtient en appliquant l'opérateur de différence seconde centrée δ_{ω}^2 sur la file horizontale $c\omega a$, séparément à X et Y.

L'élimination du terme éventuel du 4ème degré est obtenue par l'algorithme :

$$(11) \quad \frac{1}{2} \left[\delta_{\rightarrow}^2(U) - \delta_{\uparrow}^2(U) \right] = \frac{1}{2} \left[U_a + U_c - (U_b + U_d) \right] = \frac{d^2 U}{dz^2} = 2 a_2$$

qui ne fait pas intervenir la valeur U_{ω}

SCHEMA EN CARRE

La formule (11) est applicable en tenant compte du changement d'axes diagonal (formule (8)) ; il vient

$$(12) \quad (-2i) \frac{1}{2} \left[U_a + U_c - (U_b + U_d) \right] = \left[\delta_{\uparrow} \left(\frac{\partial Y}{\partial X} \right) - i \delta_{\rightarrow} \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right) \right] = \frac{d^2 U}{dz^2}$$

formule analogue à la relation déduite des relations de Cauchy Riemann

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}$$

DERIVEE TROISIEME

Elle est obtenue conjointement avec la dérivée première, selon les formules (1) à (4) du tableau (3) au § 1.3 ci-dessus. On a :

$$(13) \quad a_3 = \frac{1}{3!} \frac{d^3 U}{dz^3}(\omega) = \frac{1}{2} \left[\delta_{\rightarrow\omega}(U) - \delta_{\uparrow\omega} \frac{(U)}{i} \right]$$

Dans ce qui suit, on utilisera cette formule surtout à titre de critère pour apprécier l'exactitude des représentations approchées du 2ème degré par comparaison des diagonales; c'est pourquoi nous nous abstenons ici de calculer les coefficients numériques relatifs au cas du schéma en carré.

Remarque 1 :

Il est bon de noter que l'égalité des diagonales

$$\begin{aligned} \delta_{\rightarrow\omega}(U) &= \delta_{\uparrow\omega}(U/i) & (\text{schéma en croix}) \\ \delta_{\uparrow\omega}(U) &= \delta_{\rightarrow\omega}(U/i) & (\text{schéma en carré}) \end{aligned}$$

rigoureusement valable pour les polynômes de degré ≤ 2 , constitue un aspect particulier, transposé aux différences finies, des relations aux dérivées partielles fondamentales des fonctions complexes dites relations de Cauchy - Riemann, qu'on peut écrire de même en une seule formule

$$\frac{\partial}{\partial x}(U) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{i} \right)$$

Remarque 2 :

Le théorème énoncé à la note additive, fin du Chapitre I, indique que la dérivée 3ème en ω est égale à la différence divisée du groupe des 4 points ABCD; on a donc, d'après la formule 25 du Chapitre I :

$$\frac{d^3 U}{dz^3}(\omega) = \frac{U_a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{U_b}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{U_c}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{U_d}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

où les coefficients sont proportionnels à 1, i, i², i³ (Chapitre 1, § 1) et de module égal à $\frac{1}{4}$, si on prend comme unité la demi-diagonale $\frac{a-c}{2}$ du carré. On retrouve ainsi la formule :

$$\frac{1}{3!} \frac{d^3 U}{dz^3}(\omega) = \frac{1}{4} \left[(U_a - U_c) + i(U_b - U_d) \right]$$

équivalente à la formule en notations δ

$$= \frac{1}{4} \left[\delta_{\rightarrow\omega} - \delta_{\uparrow\omega} \frac{(U)}{i} \right]$$

CONCLUSIONS PRA TIQUES

On constate que ces formules de travail pour le calcul des dérivées des deux premiers ordres font directement intervenir les différences horizontales et verticales de X et de Y, quantités familières au calculateur et qui sont faciles à disposer sur un tableau abaque représentatif de la fonction U. Il est recommandable de maintenir distinctes les écritures concernant chaque composante X, ou Y, soit en disposant deux tableaux homologues sur deux pages différentes, soit en utilisant des couleurs d'encre différentes, sur le même tableau.

L'emploi de ces formules pour l'interpolation dans la grille carrée se trouve discuté à nouveau au titre III ci-après et illustré par les exemples numériques qui le parachèvent, au § 5.

II. SOUS-TABULATION DANS LA MAILLE CARRÉE

II. I — SOUS-TABULATION BINAIRE DANS LA MAILLE CARRÉE.

II. I, I — Interpolation à 4 points (du 3^e degré) au centre du carré : bipartition de maille.

Au centre du carré, le tableau des coefficients de Lagrange prend la forme simplifiée (voir I.III,1 précédent).

$$[\alpha] \quad \dots \quad \begin{array}{cc} (0,25; 0) & (0,25; 0) \\ (0,25; 0) & (0,25; 0) \end{array}$$

La formule qui en résulte :

$$U_i = 0,25 \sum_1^4 U_A$$

est la plus pratique des formules d'interpolation et permet d'effectuer un resserrement arbitraire des mailles par bipartition réitérée; son application aux fonctions complexes les plus courantes en Géodésie, fera l'objet principal de la 2^e partie de ce mémoire.

Reste :

Le reste ξ atteint son maximum au centre i de la maille.

Supposant la fonction exactement représentable par un polynôme du 4^e degré, on a immédiatement :

$$\begin{aligned} \xi &= -0,25 (U_a + U_b + U_c + U_d) + U_i = -\frac{U^{(iv)}}{4!} \cdot z^4_{(a,b,c, \text{ ou } d)} \\ (14) \quad &= -\frac{U^{(iv)}}{4!} \cdot (-0,25) = +\frac{1}{96} U^{(iv)} \end{aligned}$$

... le côté de maille étant, comme plus haut, pris comme unité de mesure; on obtient la règle pratique suivante pour les calculs numériques :

"La sous-tabulation par bipartition et l'interpolation générale de degré 3, dans une grille carrée, est légitime si la dérivée 4^eme (ou différence 4^eme) de la fonction, rapportée au côté de maille, est inférieure à 48 unités de la décimale utile".

On estime les composantes de cette dérivée 4^eme en calculant les différences horizontales 4^eme de X et Y pour l'intervalle de la grille.

COMPARAISON AVEC LA PRECISION DE LA FORMULE D'INTERPOLATION A 4 POINTS EQUIDISTANTS. - FONCTION D'UNE VARIABLE.

Supposant qu'on dispose d'une grille lâche, pour laquelle on envisage une sous tabulation par bipartition de maille, il est intéressant de comparer la précision correspondante, ξ avec celle ζ fournie par une interpolation ordinaire le long des lignes diagonales à 4 points, formule dont les coefficients barycentriques δ sont :

$$-0,0625 ; +0,5625 ; +0,5625 ; -0,0625$$

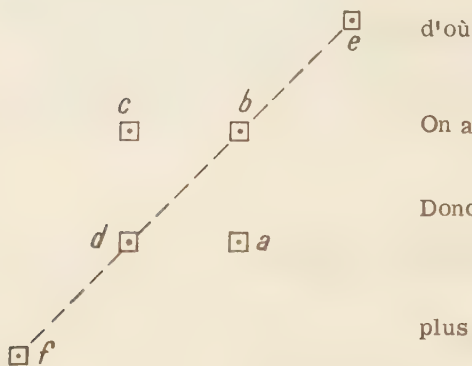
et le reste :

$$\zeta = +0,0234 \delta^4 \simeq \frac{1}{42} \delta^4 \simeq \frac{1}{42} U^{(iv)}_{(x)}$$

(1) Voir à ce sujet "Tables of Lagrangian Interpolation Coefficient" publiées par A. Lowan (New-York 1944) dont l'introduction à la page XVI donne entre autres l'expression du reste pour les diverses formules d'interpolation centrée à 1 variable.

Si l'on appelle x' l'échelle diagonale (ayant pour unité de mesure la diagonale de la grille, voir figure).
Procédant par changement de variable pour obtenir la dérivée dans le sens normal de la grille :

$$U_{(x')}^{IV} = \left(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)^4 \times U_{(x)}^{IV} = -4 U_x^{IV}$$



$$\zeta = -\frac{1}{10,67} U_{(x)}^{IV}$$

On avait trouvé plus haut :

$$\xi = \frac{1}{96} U_{(x)}^{IV}$$

Donc :

$$\zeta = 9 \xi$$

Ainsi, dans la bipartition de maille, l'erreur numérique est 9 fois plus faible que dans un procédé d'interpolation ordinaire, par lignes.

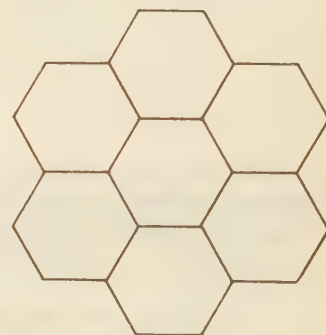
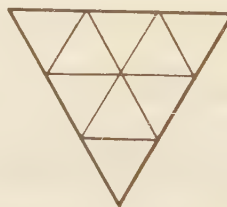
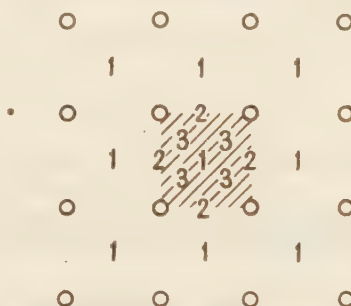
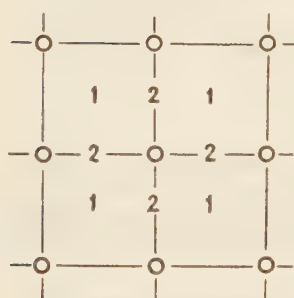
Cette précision supérieure s'explique par la meilleure configuration du dispositif de la base et la faible distance des points de base au point à calculer; avantages qui caractérisent, en général, l'interpolation complexe.

II. 1,2 — Construction de la fonction sur un ensemble dense de points au moyen d'un fractionnement réitéré des mailles. Emploi de la bipartition de maille.

Le procédé de bipartition de maille, équivalent comme on dit, à une rigoureuse interpolation π_3 au centre du carré, fournit un moyen rapide de construire des grilles carrées avec une densité de plus en plus grande dans les conditions suivantes :

Partant d'une grille initiale à 9 points, (intervalle de maille : a) (figure ci-contre, ces points sont marqués d'un zéro pour les signaler comme points de base) on déduit successivement :

- Un ensemble de 4 points de première filiation formant avec 5 des points de base, une figure semblable à la figure initiale, à maille $a \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Un ensemble de 4 points de deuxième filiation donnant une maille $\frac{a}{2}$; etc....



On obtient ainsi une densité aussi grande qu'on veut au voisinage du point central C.

Si on part maintenant d'une grille initiale à 16 points, on peut atteindre une densité indéfiniment grande sur les 4 côtés du carré central, et dans toute la surface intérieure de ce carré.

En effet, on voit que l'on peut, par le procédé ci-dessus, créer une densité arbitraire autour de chaque angle du carré central a, b, c, d, et autour du centre j de ce carré. L'examen des étapes suivantes montre que cette propriété (d'être entouré de 8 points dans la disposition voulue) appartient ensuite à tous les points nouveaux créés, situés dans le carré central ou sur les côtés de celui-ci. D'où le théorème énoncé.

Remarque :

GRILLE TRIANGULAIRE OU HEXAGONALE

On peut obtenir des résultats analogues avec une grille à dispositif triangle équilatéral, les fonctions construites étant alors des polynômes de degré 2.

Par le même raisonnement que ci-dessus, on trouve que 6 points sont nécessaires et suffisants pour obtenir un ensemble dense de valeurs autour d'un point donné, et 10 points, un ensemble dense de valeurs sur la surface d'un triangle équilatéral donné.

Il est clair que cette méthode (ainsi que la méthode analogue relative au pavage du plan par des hexagones réguliers) ont une valeur pratique moindre que la méthode en maille carrée, car il faudrait utiliser à leur propos des coordonnées "trilatérales" (u, v, w , liées par $u+v+w=0$), moins commodes que les coordonnées cartésiennes.

II. 1,3 — Complément au précédent : obtention des points médians des côtés par interpolation complexe (à 3, 4 ou 5 points).

TABLEAU DES COEFFICIENTS POUR CES INTERPOLATIONS

L'emploi exclusif de la bipartition de maille présenterait pour la pratique l'inconvénient d'exiger des valeurs de base calculées sur une extension triple (au carré) de l'extension finalement utilisée (1). Cet inconvénient sera rédhibitoire si la fonction étudiée n'est pas connue, ou si elle n'est pas définie, en dehors du champ où précisément on veut construire la table d'usage. Ce cas peut se présenter effectivement dans la pratique. Il est alors nécessaire de créer par une méthode auxiliaire un ensemble serré de valeurs sur les côtés du carré : dans certains cas, l'interpolation ordinaire à une variable peut y subvenir, si la fonction est calculable sur les lignes, limites du carré, mais dans le cas général, on recourra encore à des formules d'interpolation complexe (2), qui sont ainsi les compléments naturels et nécessaires de la bipartition réitérée de maille, méthode normale de travail.

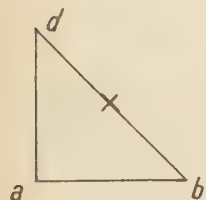
Les formules complémentaires envisagées sont celles qui fournissent la valeur de la fonction complexe au milieu d'un des côtés du carré, dans l'hypothèse :

- Soit d'une base à 4 points en croix avec leur centre
- Soit d'une base carrée ordinaire à 4 points
- Soit d'une base à 3 points

ce choix étant dicté, bien entendu, par le degré d'approximation numérique requis, et la densité atteinte par la grille de base.

On montre ci-après l'obtention de ces formules particulières, comme application des principes généraux exposés au Chapitre I sur l'interpolation complexe.

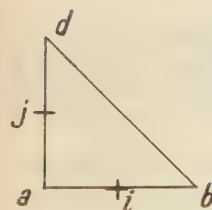
Formule (16), Traitée par composition simple des interpolations linéaires selon le symbole



(a d)	db	d	a	b
	bd (a b d)	0,25 - 0,25	0,5 ; 0	0,25 + 0,25
(a b)				

Les coefficients barycentriques d'interpolation linéaire sont en évidence sur le schéma.

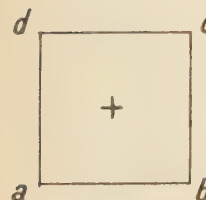
Formule (16)₂ Même méthode



	d	a	b	
Pour le pt i {	(a d) 0 ; -0,5	1 ; 0,5		0,25 ; 0,25
	(a b)	0,5 ; 0	0,5 ; 0	0,75 ; -0,25
Pour le pt j {	(a d) 0,125 ; -0,125	0,5 ; 0,25	0,375 ; -0,125	0,75 ; +0,25
	(a b) 0,375 ; 0,125	0,5 ; -0,25	0,125 ; 0,125	0,25 ; -0,25

Formule (17), Etablie au paragraphe I, 1 (base polygone régulier, sous la forme $\frac{\sum \gamma_i / z^{-a_i}}{\sum \gamma_i}$)

Vérifiée par composition :



(a d c)				
	db	(a b c d) ... (emploi de (16))		
	bd			
(a b c)				
	d	a	b	c
(a d c)	0,5 ; 0	0,25 ; 0,25		0,25 ; -0,25 + 0,5
(a b c)		0,25 ; -0,25	0,5 ; 0	0,25 ; 0,25 + 0,5

(1) Inconvénient analogue à celui qui se rencontre à propos des "panneaux de tête" et "panneaux de queue" dans les tables à simple entrée.

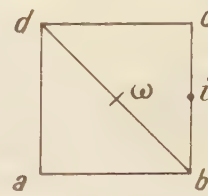
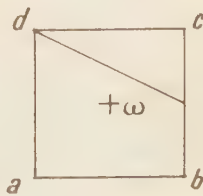
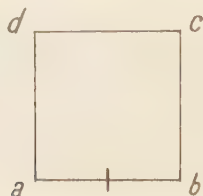
(2) Cette remarque au sujet de l'interpolation à une variable souligne l'utilité d'une comparaison précise de l'une ou l'autre méthode, comparaison qui a été faite ci-dessus ...

Formule (17)₂ Emploi de la méthode de composition et application de la formule (16)₂ précédente

	d	a	b	c	
(abd)	0,125 ; -0,125	0,5 ; 0,25	0,375 ; -0,125		} 0,5 ; 1 0,5 ; -1
(abc)		0,375 ; 0,125	0,5 ; -0,25	0,125 ; 0,125	
	0,1875 ; 0,0625	0,3125 0,3125	0,3125 -0,3125	0,1875 ; 0,0625	

Formule (18)₃ Emploi de la méthode exposée au I, 1, base polygone régulier (sous la forme

On obtient directement le schéma vectoriel des coefficients, d'où leur détermination à un facteur de proportionnalité près.



Vérification par méthode de composition générale d'interpolations

(Cf. au 1, 2, 4, ci-dessus, composition plus générale des interpolations)

Les coefficients de i dans les groupes ternaires bcd, abc et bwc sont ceux des formules (16)₁ et (16)₂. Les coefficients d'interpolation de i par rapport au groupe ternaire aωd sont les suivants :

	d	ω	a	
(dω)	-0,50 ; -0,5	+1,50 ; +0,5		+0,5 ; -1
(ωa)		1,5 ; -0,5	-0,5 ; +0,5	0,5 ; +1
(dωa)	-0,75 ; +0,25	2,50 ; 0	-0,75 ; -0,25	

d'où le tableau pour le groupe à 5 points

	a	b	c	d	ω	
(bcd)		0,375 ; 0,125	0,5 ; -0,25	0,125 ; 0,125		-0,75 ; 0,25
(abc)	0,125 ; -0,125	0,5 ; 0,25	0,375 ; -0,125			-0,75 ; -0,25
(bwc)		0,25 ; -0,25			0,5 ; 0	2,5 ; 0
(abc dω)	-0,125 ; +0,0625	0 ; +0,3125	0 -0,3125	-0,125 ; -0,0625	1,25 ; 0	

Evaluation du reste

Le reste est calculé selon la méthode dont il a été donné un premier exemple au paragraphe 2, 3 ci-dessus, c'est-à-dire, en supposant que pour apprécier la précision d'une parabole Lagrangienne donnée à p points, on peut se référer à la parabole Lagrangienne supérieure à p+1 points; ceci équivaut à assimiler le reste au terme négligé dans le développement limité aux différences divisées, qui représente cette parabole à p+1 points.

C'est ainsi que discutant la précision d'une interpolée à 3 ou 4 points, de la maille carrée, l'on introduit le plus prochain point de grille susceptible de venir compléter la base (voir figure ci-contre) et l'on a des formules de reste comme suit (en conservant aux notations η_e , η_ω , leur acceptation du paragraphe 2, 3)

base aωb ; reste au point i

$$\frac{ia}{ea} \frac{ib}{eb} \frac{i\omega}{e\omega} \times \eta_e$$

base abcd ; reste au point i

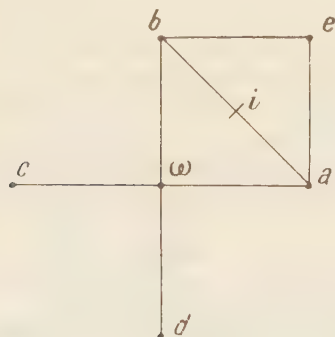
$$\frac{ia}{\omega a} \frac{ib}{\omega b} \frac{ic}{\omega c} \frac{id}{\omega d} \times \eta_\omega$$

Il se trouve que les quantités η_e ou η_ω s'évaluent immédiatement.

L'une η_e par les relations ou différences centrées du 1er ordre, en croix, analogues aux relations :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}$$

L'autre η_ω par l'opérateur de bipartition de la maille carrée.



En revanche, dans le cas de l'interpolée à 5 points $abcd\omega$, l'introduction d'un 6ème point de la grille (e) par exemple est peu expédiente pour faire paraître l'erreur de la formule. Puisque cette formule d'interpolation apparaît dans la phase initiale d'une tabulation (formation de la grille) il est plus normal à ce stade d'apprécier le reste au moyen de la dérivée (5^e) de la fonction.

L'étude (faite notamment par Montel (I) de la bibliographie, des différences divisées, comparées aux dérivées, montre que l'expression du reste est ainsi :

$$(15) \quad \eta_i = \prod_a^{\omega} (i - a) \times \frac{U^v}{5!}$$

Dans la 2ème partie de ce mémoire, envisageant l'étude des projections Géodésiques par ces procédés de sous tabulation, on utilisera cette dernière expression du reste et on empruntera à des études analytiques particulières, la connaissance de la valeur numérique de la dérivée 5ème.

Le tableau ci-après récapitule, pour ces formules respectives, les coefficients barycentriques (représentés aussi dans chaque cas, par leur image vectorielle dans le plan complexe), et l'évaluation du reste.

III. 1,4 — Dispositifs de sous-tabulation binaire pour la maille carrée (jusqu'à 5 points).

(Echelle pour les coefficients Lagrangiens)

$+1 \quad 0$

(16)₁

$d \ 0,25 ; -0,25$
 $a \ 0,50 ; 0$
 $b \ 0,25 ; 0,25$

Reste = $0,25 \eta_c$

3 POINTS

$+1 \quad 0$

(16)₂

$+0,125 \ -0,125 \ d$
 $+0,375 \ -0,125 \ b$
 $+0,500 \ +0,250 \ a$

Reste : voir coefficient ci-dessus pour c en module $\eta_i < 0,2 \eta_c$

$d \quad c$

(17)₁

$a \left. \begin{matrix} b \\ c \\ d \end{matrix} \right\} 0,25 ; 0$

Reste $\frac{U^v}{3!}$ si on prend 1/2 comme unité

4 POINTS

$d \quad c$

(17)₂

$+0,3125 ; -0,3125 \ c$
 $+0,1875 ; -0,0625 \ d$
 $+0,1875 ; +0,0625 \ a$
 $+0,3125 ; +0,3125 \ b$

Reste $\frac{5}{4} \eta_\omega$

5 POINTS

(18)

$0, \quad ; \ 0,3125 \ b$
 $0, \quad ; \ -0,3125 \ c$
 $1,25 ; \ 0, \quad \omega$
 $-0,125 ; \ -0,0625 \ d$
 $-0,125 ; \ +0,0625 \ a$

Reste $\frac{U^v}{4!}$ si on prend 1/2 comme unité

II. 2 — SOUS-TABULATION DÉCIMALE DANS LA MAILLE CARRÉE.

II. 2,1 — Rappel des tableaux de coefficients Lagrangiens calculés par des précédents auteurs. Utilité pour le calcul des points isolés par formules du 2^e ou du 1^{er} ordre.

L'exécution de passes successives de sous tabulation binaire pour fractionner l'intervalle initial de la maille offre quelques inconvénients pratiques, qui amèneront l'usager à préférer, dans certains cas, l'emploi d'une sous tabulation décimale avec des coefficients barycentriques précalculés. On perd évidemment ainsi la simplicité de l'algorithme de bipartition de maille carrée, en revanche, on a l'avantage de rester dans un intervalle de base décimal (par ex, en Géodésie, 100 Km), si la grille des points fondamentaux avait été calculée avec un intervalle également décimal (par ex, 1,000 Km), comme il est naturel, et l'on obtient plus rapidement le resserrement de maille désiré.

Les tables de coefficients Lagrangiens complexes dans la maille carrée pour les parties décimales de l'intervalle de maille ont été établies par les auteurs américains A. Lowan et H. Salzer (voir 2 de la bibliographie) pour l'interpolation Lagrangienne à 3 points ou à 4 points en carré.

Ils ont par la suite, étendu leur travail numérique à des bases de 5, 6 ou 7 points, bases qui n'affectent pas une disposition géométrique régulière, dans la grille carrée, mais qui ont été choisies pour donner une forme générale de coin (lettre L) encadrant la région intéressante.

II. 2,2 — Table des valeurs numériques pour le coefficient d'interpolation

Table des X ou (R) L_A.

B											A'	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
	0	0145	0560	1215	2080	3125	4320	5635	7040	8505	1,0000	
9	0855	0900	1185	1680	2355	3180	4125	5160	6255	7380	8505	9
8	1440	1415	1600	1965	2480	3115	3840	4625	5440	6255	7040	8
7	1785	1720	1835	2100	2485	2960	3495	4060	4625	5160	5635	7
6	1920	1845	1920	2115	2400	2745	3120	3495	3840	4125	4320	6
5	1875	1820	1885	2040	2255	2500	2745	2960	3115	3180	3125	5
4	1680	1675	1760	1905	2080	2255	2400	2485	2480	2355	2080	4
3	1365	1440	1575	1740	1905	2040	2115	2100	1965	1680	1215	3
2	0960	1145	1360	1575	1760	1885	1920	1835	1600	1185	0560	2
1	0495	0820	1145	1440	1675	1820	1845	1720	1415	0900	0145	1
ω	0	0495	0960	1365	1680	1875	1920	1785	1440	0855	0	A
		1	2	3	4	5	6	7	8	9		

Formule

$$X_M = \sum X_{A'} (R) L_{A'} - \sum Y_{A'} (I) L_{A'}$$

$$Y_M = \sum Y_{A'} (R) L_{A'} + \sum X_{A'} (I) L_{A'}$$

Nous pensons que le premier travail cité présente un intérêt pratique plus grand que le second, l'interpolation systématique n'étant guère concevable avec une base de plus de 4 sommets. L'emploi d'un processus de fractionnement par l'algorithme d'interpolation binaire à 5 points de base (croix avec son centre) est selon nous, un moyen meilleur pour atteindre l'intervalle de maille qui autorise l'interpolation à 4 sommets, intervalle qui est très rapidement obtenu.

Arrivé à ce stade, l'emploi des tables de sous tabulation décimale fournit une telle réduction de l'intervalle de maille, qu'on peut espérer traiter certains travaux de transformations en série, très groupés dans une partie peu étendue de la maille, au moyen de formules du 2ème ou même du 1er degré s'appuyant sur les sommets de la sous maille ainsi créée; de tels exemples ne sont pas rares dans les travaux de transformations de coordonnées, en Géodésie.

Pour la commodité des calculateurs, nous donnons ci-après la table à 4 points de MM. Lowan et Salzer, table qui, par des permutations évidentes sur les arguments d'entrée, suffit à fournir les 4 coefficients Lagrangiens voulus, grâce à la disposition symétrique de cette base.

La traduction de cette table numérique sous forme d'un graphique (abaque de courbes) est donnée ci-après au § III, 5 de ce chapitre, où elle est utilisée pour une estimation rapide d'un reste d'interpolation à 3 points.

Lagrangien à 4 points, base carrée ($\omega ABA'$) (d'après Lowan et Salzer).

Table des Y ou (I)L_A,

B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A'
	0	0945	1760	2415	2880	3125	3120	2835	2240	1305	0
9	0945	0720	1295	1740	2025	2120	1995	1620	0965		1305 9
8	0160	0595	0960	1225	1360	1335	1120	0685		0965	2240 8
7	0315	0540	0725	0840	0855	0740	0465		0685	1620	2835 7
6	0480	0525	0560	0555	0480	0305		0465	1120	1995	3120 6
5	0625	0520	0435	0340	0205		0305	0740	1335	2120	3125 5
4	0720	0495	0320	0165		0205	0480	0855	1360	2025	2880 4
3	0735	0420	0185		0165	0340	0555	0840	1225	1740	2415 3
2	0640	0265		0185	0320	0435	0560	0725	0960	1295	1760 2
1	0405		0265	0420	0495	0520	0525	0540	0595	0720	0945 1
0		0405	0640	0735	0720	0625	0480	0315	0160	0045	0 0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A

Exemple d'emploi indiquant les permutations nécessaires sur les entrées
Coefficients pour un point M de coordonnées (0, 2 ; 0, 2)

$$L_{A'} = (0, 2 ; 0, 2)$$

$$L_B = (0, 2 ; 0, 8)$$

$$L_\omega = (0, 8 ; 0, 8)$$

$$L_A = (0, 8 ; 0, 2)$$

Calcul de coordonnées : voir à l'exemple numérique du III, 5 ci-après. On vérifie que les coefficients Lagrangiens ci-dessus, appliqués aux coordonnées proposées $\omega ABA'$, reconstituent les valeurs indiquées pour le point b.

II. 2,3 — Décroissance du reste lorsque la maille se resserre.

On rappelle que la grandeur du reste pour une interpolation de degré p dans la maille carrée est proportionnelle à a^p (a : intervalle de maille).

Partant d'une maille de base donnée pour laquelle le reste est η , on peut ainsi prévoir quelle sous-tabulation (fractionnement à $\frac{a}{N}$ de l'intervalle initial a) il est nécessaire d'effectuer pour atteindre, avec le degré p , une approximation ε fixée d'avance. Le programme des sous-tabulations s'établira aussitôt en conséquence.

Il résulte de ceci que le niveau de l'interpolation parabolique π_2 est atteint assez rapidement dans les sous-tabulations, l'approximation linéaire exigeant en revanche, un resserrement considérable des mailles, resserrement parfois onéreux à atteindre pour la pratique. Les tables d'usage seront donc le plus souvent à l'interpolation π_2 .

III. PRATIQUE DE L'INTERPOLATION POUR LE CALCUL DES POINTS ISOLÉS DANS UNE GRILLE CARRÉE CHOIX DES FORMULES DANS LES CAS D'ESPÈCE

III. 1 — INTERPOLATION PAR POLYNÔME DU 3^e DEGRÉ, EXACTE AUX QUATRE SOMMETS DE LA MAILLE.

Les préliminaires ci-dessus, qui traitent notamment du calcul des dérivées d'une fonction complexe en un point, au moyen de la grille carrée, représentant numériquement cette fonction, fournissent les éléments voulus pour permettre le calcul numérique de points isolés; on y a vu établies, en effet, les formules des coefficients jusqu'au 3^e ordre, et au delà, pour des polynômes entiers, interpolant rigoureusement la fonction en certains sommets de la grille.

Parmi ceux-ci, le polynôme du 3^e ordre π_3 qui s'appuie sur les 4 sommets d'une maille, fournit évidemment une interpolation excellente étant donné sa symétrie, par rapport à la maille, et la finesse de l'approximation obtenue. Il faut cependant remarquer à son sujet que pour l'emploi courant, le calcul numérique des expressions du 3^e ordre :

$$x^3 - 3xy^2, \dots, 3x^2y - y^3,$$

est laborieux, au regard de la petitesse des appoints fournis.

Par conséquent, lorsque les calculs de $U(x)$ sont demandés avec une assez grande densité dans le plan (z) il convient d'augmenter d'abord la densité de la grille de base, c'est-à-dire, resserrer davantage l'intervalle de maille, jusqu'à rendre l'appoint du 3^e ordre effectivement négligeable (inférieur à la précision demandée).

III. 2 — INTERPOLATION PAR POLYNÔME, TRONQUÉ AU 2^e DEGRÉ, RÉSIDUS AU SOMMET DU CARRÉ DE MAILLE.

Comme une opération de sous-tabulation peut s'effectuer sans aucune peine par bipartition de maille, et la décroissance du reste du 3^e ordre étant très rapide (décroît comme le cube de l'intervalle de maille), le bilan est avantageux du fait de la suppression des calculs de 3^e ordre pour les points isolés.

Cette suppression pure et simple, en conservant tels quels les trois premiers coefficients de la formule, revient à renoncer à l'interpolation Lagrangienne exacte, et à la remplacer par une formule d'approximation, exacte au centre de la maille, mais qui laisse aux 4 sommets des résidus, deux à deux égaux, et de signe contraire.

Ces valeurs des résidus sont faciles à retrouver directement par la comparaison des diagonales (formule (13), II. 1 ci-dessus). Reformant, en effet, les deux relations

$$\underset{\rightarrow}{\delta_{\omega}} X - \underset{\uparrow}{\delta_{\omega}} Y, \quad \underset{\rightarrow}{\delta_{\omega}} Y - \underset{\uparrow}{\delta_{\omega}} (-X)$$

les restes cherchés ont en chaque sommet une valeur absolue égale au 1/4 des résidus de ces relations, et des signes qui répartissent l'erreur également sur chacun des X et des Y y figurant (voir l'exemple complet traité ci-après au paragraphe 5.)

III. 3 — INTERPOLATION PAR POLYNÔME, TRONQUÉ AU 1^{er} DEGRÉ.

L'on peut se trouver en présence de calculs de points à densité très élevée et une extension de champ restreinte, dans des conditions qui permettent de négliger aussi l'effet du terme du 2^e ordre; on utilise dans ce cas les deux premiers termes du polynôme ci-dessus, obtenant ainsi une approximation exacte au point central et approché au second ordre près dans son voisinage. Puisque le résidu du 3^e ordre est supposé ici entièrement négligeable, c'est celui du second ordre qui fournit la partie principale de l'erreur.

On calcule le reste du 2^e ordre comme on a fait précédemment pour le reste du 3^e ordre, en écrivant une relation simple exprimant la nullité de la dérivée 2^eme et en l'appliquant aux valeurs de la table.

La relation employée ici est $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$ sous la forme

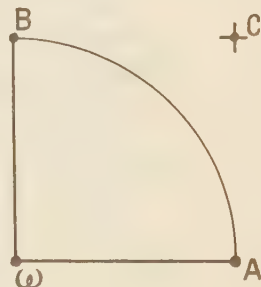
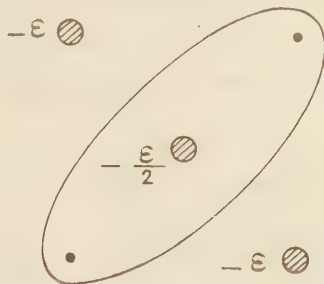
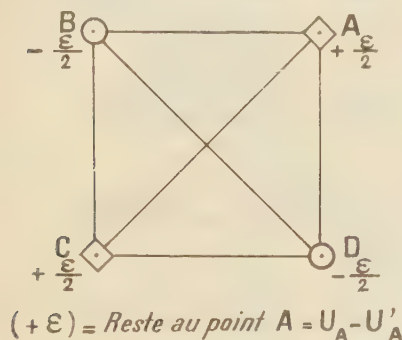
$$(19) \quad \frac{1}{2}(U_A + U_C) - \frac{1}{2}(U_B + U_D) = 0 = (\varepsilon)$$

Cette formule exprime l'égalité des valeurs obtenues pour U_ω en le calculant par interpolation linéaire selon l'une ou l'autre diagonale : propriété qui est évidemment vérifiée par les seules fonctions linéaires.

Les résidus cherchés en chacun des 4 sommets sont donnés par la figure jointe, où ε est le nombre complexe, résidu de la relation (19), quand on l'applique aux 4 points de table sommets de la maille carrée U_A, U_ω, U_C, U_B .

La formule du 1er degré exacte au centre et à résidus alternés sur les diagonales est à adopter si le champ de points donnés se distribue régulièrement dans la maille carrée.

Si la disposition des points à transformer affecte un contour allongé dans le sens d'une diagonale (voir figure) on pourra préférer la formule approchée du 1er degré exacte aux sommets A et C de la diagonale, il est évident qu'on aura, en contre-partie, un reste $-\frac{\varepsilon}{2}$ au centre.



4 - Interpolation Lagrangienne du 2ème degré, exacte en trois des sommets de la maille carrée.

Pour des dispositions particulières du groupe de points U_x à calculer, on peut être amené à renoncer à la symétrie, par rapport aux 4 sommets de la maille, et adopter une véritable interpolation Lagrangienne exacte en 3 sommets (figure ci-contre).

La formule de travail se construit d'après la théorie générale de l'interpolation par différences, généralisant la formule de Newton classique des fonctions à simple entrée.

La valeur U_ω étant prise comme valeur de référence on définit une différence seconde Δ_2 par l'opération:

$$\Delta_2 = \frac{-\Delta U_A + \frac{\Delta U_B}{i}}{(AB)} = \frac{-\Delta U_A + \frac{\Delta U_B}{i}}{-1+i}$$

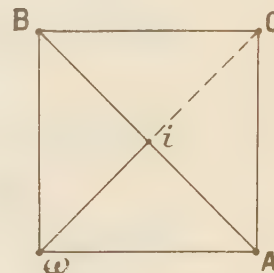
qui est facile à exécuter numériquement. La formule d'interpolation est alors :

$$U(z) = U_\omega + \Delta z \times \left[(\Delta U_A) + (\Delta z - 1) \times \Delta_2 \right]$$

qu'on peut ramener pour la commodité du calcul numérique, à un aspect ordonné :

$$U(z) = U_\omega + \Delta z \times A + \Delta z^2 \times B$$

(Voir exemple au paragraphe 5 ci-après)



Reste.

Le reste dans la maille carrée est maximum au point C.

Il est égal à la différence divisée $[\omega ABC]$ (par définition même de celle-ci) après y avoir ramené le coefficient de U_C à l'unité : c'est l'opérateur "comparaison de diagonales" déjà plusieurs fois rencontré ci-dessus. Le reste en C est nul si les diagonales sont égales dans la maille U_A, U_ω, U_B, U_C ; dans ce cas, la dérivée 3ème est nulle, la fonction $U(z)$ est donc a priori représentable par un polynôme du 2ème degré Lagrangien."

Pour la suite, il est utile d'évaluer la valeur numérique relative de ce reste en point i, milieu de la maille carrée.

En calculant le $\pi(z - \omega)(z - A)(z - B)$ dans ce cas et le précédent, on aperçoit immédiatement que le reste en i, η_i , est :

$$\eta_i = 0,25 \times \eta_A$$

D'une manière générale, le reste en un point z pour cette interpolation est :

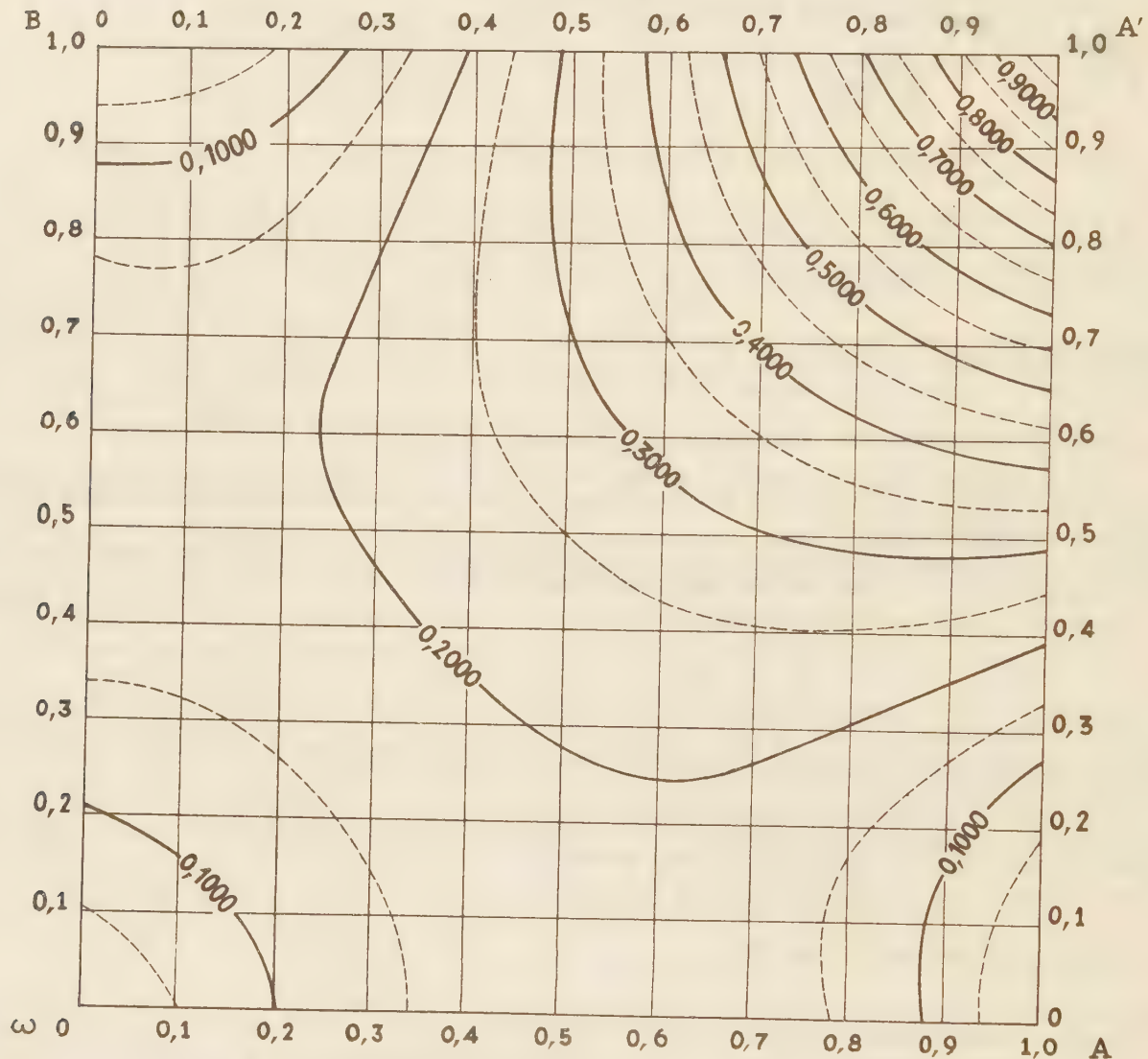
$$(20) \quad \eta_{z'} = L_{\omega ABA'}(z) \times \eta_{A'}$$

en notant par $L_{\omega ABA'}$ le coefficient de Lagrange relatif au sommet A' dans l'interpolation à 4 points dans la maille $\omega A A' B$, coefficient dont la table des valeurs numériques est donnée plus haut au II, 2, 2, et dont nous fournissons l'abaque des deux composantes.

Ainsi pourra-t-on calculer exactement le reste pour cette interpolation 3 points en cas de nécessité.

ABAQUES DES COMPOSANTES X ET Y DU COEFFICIENT

Abaque des X



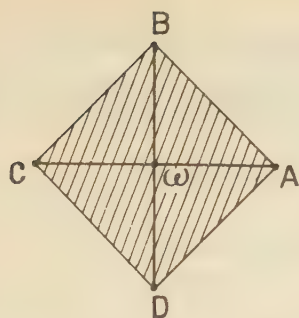
Sur cet abaque des X les cotes sont toujours positives
 Courbes représentées 0 (0,1) 1,0
 et courbes intercalaires 0,05 (0,15) 0,95

L'abaque fournit rapidement le reste de l'interpolation à 3 points.

Exemple : Point isolé M, coordonnées (0,8 ; 0,4) $x = 0,25$; $y = 0,14$

Si, pour fixer les idées, le résidu du 2ème Ordre en A' est $+1m$, l'erreur commise en M est :

$$\Delta X = 0,25 - 0,14 = 0,11 \quad \Delta Y = 0,14 + 0,25 = 0,39$$

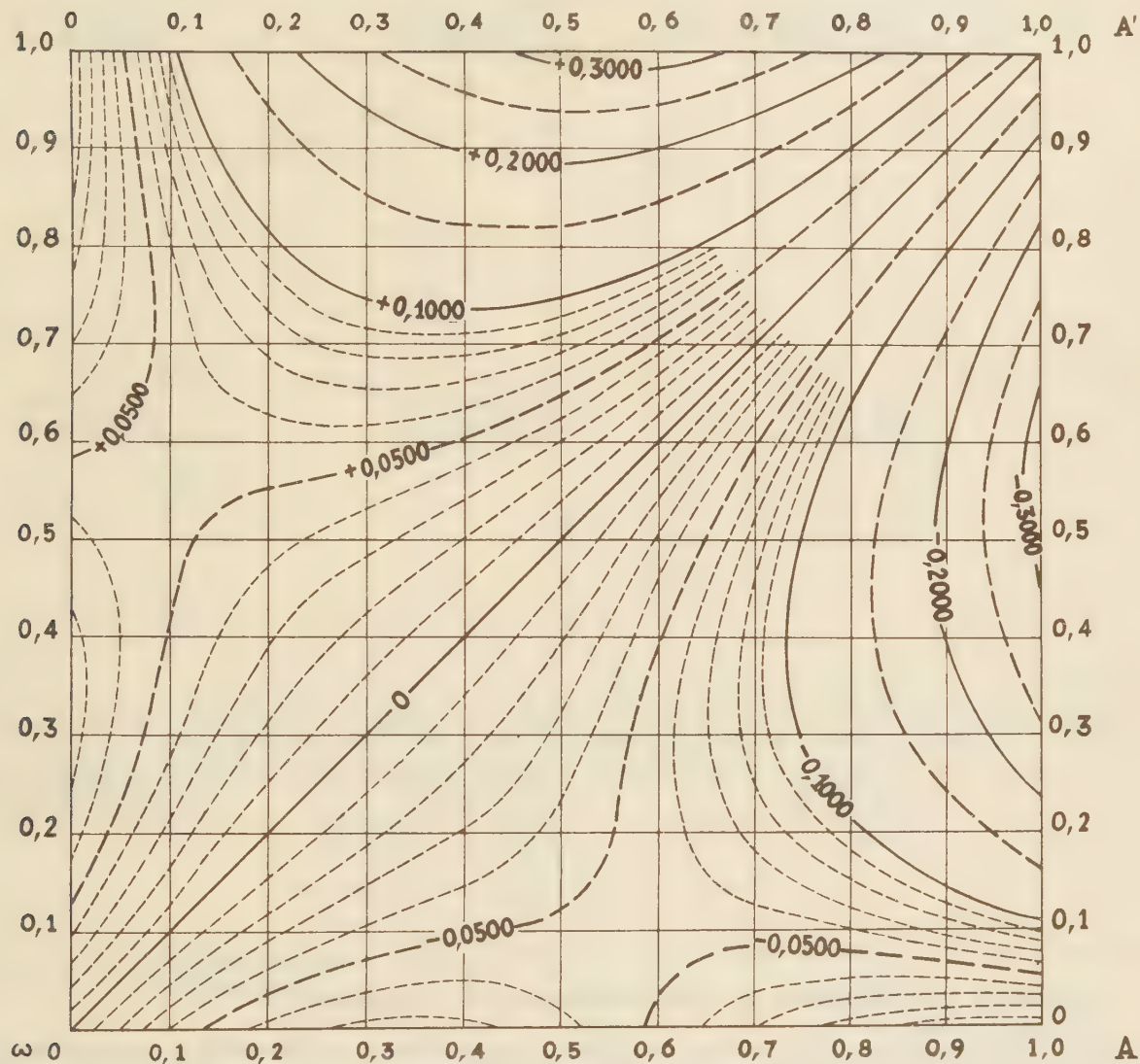


Ainsi sont rassemblés les divers éléments utiles au calculateur pour mettre en œuvre ce procédé d'interpolation et discuter son emploi en concurrence avec la méthode d'approximation symétrique dans la maille, dont les formules sont un peu plus simples.

A priori, il est clair que l'interpolation Lagrangienne, exacte en 3 sommets, est à envisager toutes les fois que le champ d'emploi est sensiblement circonscrit par le contour triangulaire ωAB par exemple pour traiter avec les 4 formules analogues un champ carré disposé comme sur la figure ci-contre.

LAGRANGIEN D'INTERPOLATION COMPLEXE A 4 POINTS

Abaque des Y



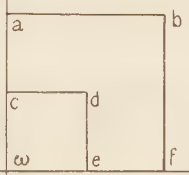
Courbes représentées - 0,3 (0,1) - 0,1 ; - 0,1 (0,01) 0 ;
 0 (0,01) + 0,1 ; + 0,1 (0,1) + 0,3
 et courbes intercalaires 0,15 et 0,25

Fragment de grille correspondant à la fonction complexe

$$U = U + (-3,97; -850,92)z + (-18,59; +2,65)z^2 + (4,12; -0,01)z^3$$

Origine du plan z par convention : $x = 500$ $y = 220$

U_0 : (349,650,97; 5204.195,38) en ce point.

	425 km	475	525
275 km	B'	B	A'
	275.120,38 5.259.850,54	325.126,03 5.259.410,14	375.120,85 5.258.974,46
225	C		A
	274.684,58 5.209.836,60	324.693,41 5.209.408,58	374.691,40 5.208.982,19
175	C'	D	D'
	274.262,69 5.159.821,02	324.271,62 5.159.405,37	374.269,70 5.158.988,28

III. 5 — EXEMPLES NUMÉRIQUES DE L'APPLICATION DES FORMULES.

On considère un fragment (ci-dessus) de grille carrée relative à une fonction algébrique complexe de degré 3, qui a une signification géodésique (problème de transformation de coordonnées). Le plan de (z) est le plan des coordonnées "anciennes", les distances entre les nœuds de la grille sont d'ordre de 50 à 100 Km (voir figure ci-contre). Les valeurs de (U) représentent des mètres et centimètres (coordonnées "nouvelles").

On va montrer sur cet exemple l'application des formules établies ci-dessus, avec la discussion du reste, en vue de conserver une précision fixée à l'avance.

Le terme du 3^e degré dans la fonction est connu au départ, sa valeur numérique est (+ 4,12; +0,01) en mètres (pour U) par centaine de Km (pour z). L'on connaît ainsi l'ordre de grandeur des restes auxquels on doit s'attendre dans les formules de travail de degré ≤ 2 .

Voici les phases successives d'une étude numérique du problème, et le calcul des coefficients des formules d'interpolation pour le voisinage du point marqué (coordonnées z : $x = 475$, $y = 225$).

III. 5,1 — Vérification de l'approximation du 3^e degré, partout.

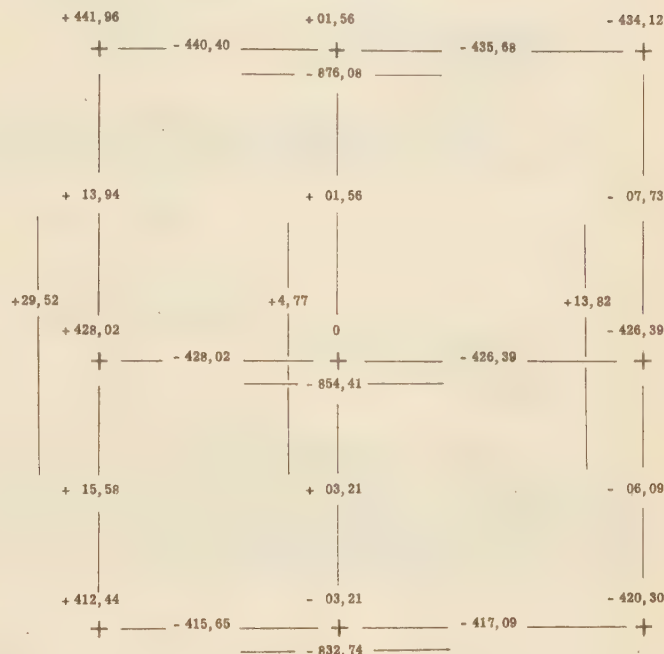
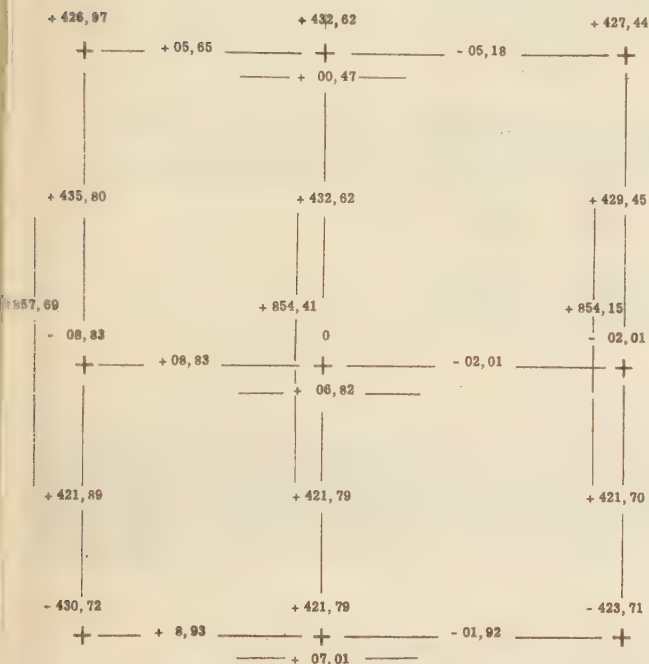
On en est sûr a priori puisque la grille est construite à partir d'un tel polynôme.¹ On la vérifie par l'algorithme de moyenne en carré appliqué au groupe A'B'C'D'ω, et A B C D ω

$$\begin{aligned} X_{\omega} &= 324.693,41 & \sum \frac{X_{A'}}{4} &= 324.693,405 & \sum \frac{X_A}{4} &= 324.693,408 \\ Y_{\omega} &= 5.209.408,58 & \sum \frac{Y_{A'}}{4} &= 5.209.408,575 & \sum \frac{Y_A}{4} &= 5.209.408,575 \end{aligned}$$

Disposition des différences à former sur la grille

Grille des X (réduite à l'origine ω)

Grille des Y



Dès lors, pour la commodité on prendra X_{ω} et Y_{ω} comme nouvelle origine pour les X et Y. La nouvelle liste des valeurs est écrite au dessous (figure 2). Le terme du 3^eème degré étant de 4 m pour 100 Km, son effet est de 4 (0,5)³ = 0 m 5 dans une maille carrée telle que A B C D dont les rayons maximum sont 50 Km.

Effectuant la comparaison des diagonales, on trouve en effet des résidus de :

$$\begin{pmatrix} 6,82 \\ X_A - X_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,77 \\ Y_B - Y_D \end{pmatrix} = 2 \text{ m}, 05$$

$$\begin{pmatrix} -854,40 \\ Y_A - Y_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -854,41 \\ X_B - X_D \end{pmatrix} = 0 \text{ m}, 01$$

ce qui montre que la représentation par formule du 2^eème ordre symétrique à centre ω laissera sur chacun des 4 sommets A B C D un reste de 0 m 51.

III. 5,2 — Valeurs approchées au mètre, par formule du 2^e ordre dans le carré A B C D.

CALCUL DU COEFFICIENT DU 1^{er} DEGRE

1° Par les différences relatives aux sommets abcd du schéma en croix. On reprend les nombres apparus ci-dessus formules (9)

$$\alpha = 1/2 (6,82 + 4,77) = 5,80$$

$$\beta = 1/2 (-854,40 - 854,41) = -854,40$$

2° Par les différences relatives aux sommets A'B'C'D', schéma en carré formules (10)

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [(X_{A'} - X_{B'}) + (X_{D'} - X_{C'})] + \frac{1}{2} [(Y_{A'} - Y_{D'}) + (Y_{B'} - Y_{C'})] \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{"} \quad \quad \quad + 0,47 \quad \quad \quad + 7,01 \quad \quad \quad - 13,82 \quad \quad \quad + 29,52 \\ \text{"} \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 3,74 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 7,85 \\ \text{"} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 05,80 \\ \beta = \text{par formule analogue :} \quad \quad \quad - 854,41 \end{array}$$

CALCUL DU COEFFICIENT DU 2ème DEGRE

(11) 1° Par les différences secondes relatives aux groupes (C ω A ou D ω B) du schéma en croix (formules

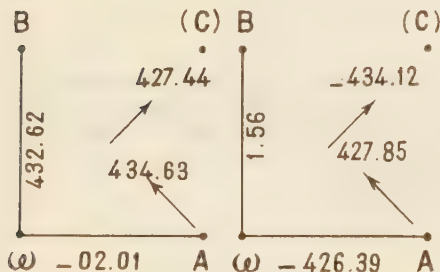
$$\begin{array}{rcl} (X_A - X_\omega) - (X_\omega - X_C) & (Y_A - Y_\omega) - (Y_\omega - Y_C) \\ - 2,01 - (+8,83) & - 426,39 - (-428,01) \\ \text{[multiplication par} & - 10,84 & + 1,62 \\ \text{2 pour tenir compte} & - 21,68 & + 03,24 \\ \text{des unités.]} & & \end{array}$$

2° Au moyen des différences rectangulaires relatives au carré A'B'C'D'

(Formules 12. On utilise les nombres utilisés déjà ci-dessus pour le calcul des dérivées premières)

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \\ (Y'_A - Y'_B) - (Y'_D - Y'_C) & - (X'_A - X'_B) + (X'_D - X'_C) \\ - 876,08 - (-832,74) & - (+0,47) + (+7,01) \\ \text{(multiplication par } \frac{1}{2} & - 43,34 & + 6,54 \\ \text{pour coeff. de} & \gamma = - 21,67 & \delta = + 3,27 \\ \text{formule} & & \end{array}$$

On constate la concordance des résultats numériques obtenus par deux voies indépendantes, utilisant les deux bases types qui peuvent se rencontrer dans la pratique. On note que, puisqu'il s'agit d'une formule d'approximation exacte, au 3ème ordre et termes d'ordre supérieur près, au voisinage du point ω, deux bases centrées sur ω, mais de rayons différents, donnent les mêmes valeurs numériques pour les coefficients. Comme on a vu, la formule obtenue convient, pour opérer à l'approximation de degré 0m, 50, à l'intérieur du carré ABCD, dont la demi-diagonale a 50 Km.



III. 5,3 — Interpolation Lagrangienne sur la base A ω B.

On fait emploi ici de la théorie classique de l'interpolation newtonienne par différences :

Nous redonnons ci-contre, le schéma de la base et des différences numériques utiles.

$$\begin{array}{rcl} \Delta_A = - 02,01 & - 426,39 & \\ (\times 2) & - 04,02 & - 852,78 \\ \Delta_B = + 01,56 & - 432,62 & \\ (\times 2) & + 03,12 & - 865,24 \\ \text{Différence 2ème sur } \overrightarrow{AB} \dots (\Delta_B - \Delta_A) = + 03,57 & - 06,23 & \\ \frac{1}{2} (-R + I) & \frac{1}{2} (R + I) & \\ \text{Différence 2ème sur } \omega A \dots & - 04,90 & + 01,33 \\ (\times 4) & - 19,60 & + 05,32 \end{array}$$

Compte tenu de l'échelle (puisque ω A = 50 Km = $\frac{1}{2}$ unité) on obtient la formule d'interpolation exacte en ω, A et B.

$$U = U_\omega + \Delta z \left[(-04,02) - (852,78) + (\Delta z - \omega A) (-19,60 ; +05,32) \right]$$

que l'on peut écrire sous la forme, plus commode pour le calcul numérique :

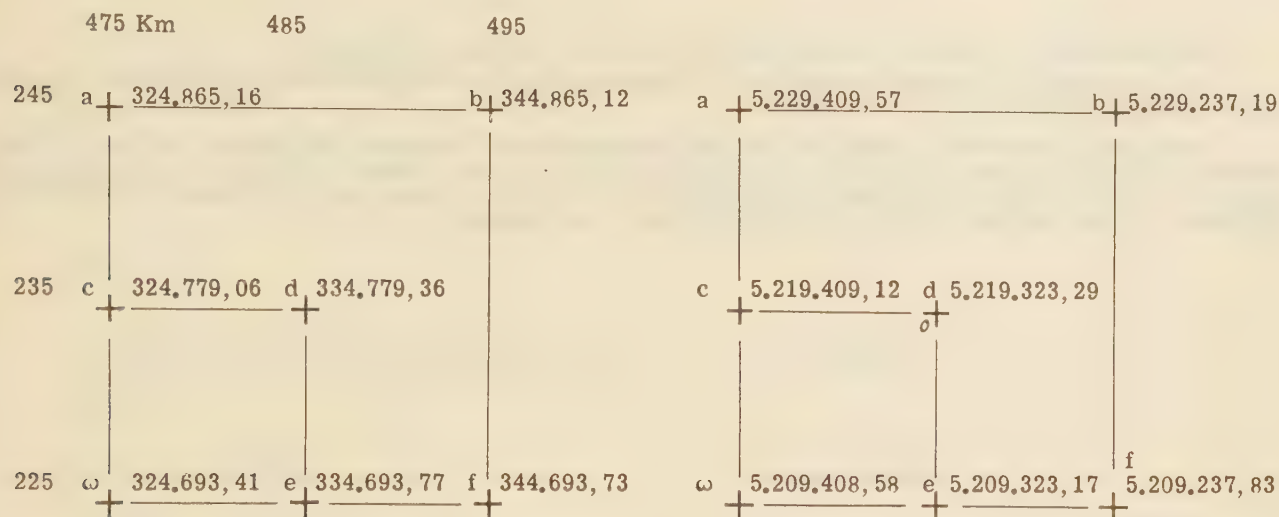
$$U_\omega + \Delta z (+05,78 ; -855,44) + \Delta z^2 (-19,60 ; +05,32)$$

D'après la comparaison des diagonales $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C}$, on voit que cette formule Lagrangienne laisse au point C un reste de :

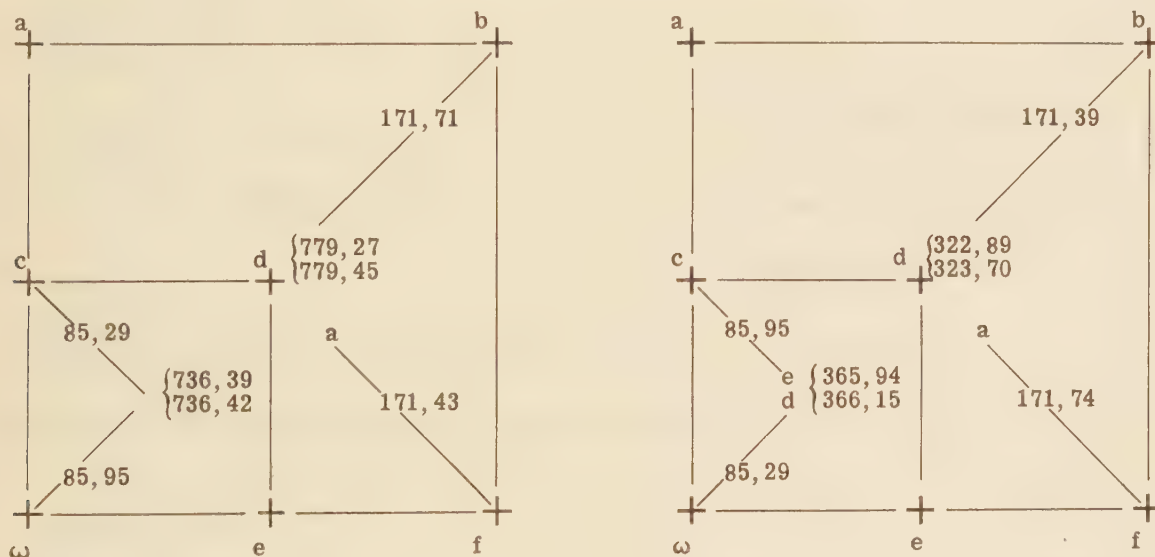
$$427,44 - 427,85 = -0,41 ; (-434,12) - (-434,63) = +0,51$$

Approximation de petites mailles par formules linéaires

1) Grille considérée



2) Etude de mailles de 20 km et 10 km de côté (diagonales et moyennes comparées)



le reste au point i étant le quart du précédent, la formule a l'exactitude du décimètre à l'intérieur du triangle ωAB .

REMARQUE SUR LA VALEUR DU COEFFICIENT DU 2ème DEGRE DANS LA FORMULE

La comparaison avec les valeurs des dérivées secondes $\frac{d^2 U}{dz^2}$ aux nœuds qui entourent ω dans la grille carrée montre que le coefficient de z dans la formule lagrangienne, interpolante exacte en ωAB , est égal (au facteur $\frac{1}{2!}$ près) à la dérivée seconde de $U(z)$ au point j, centre de gravité du triangle ωAB .

On voit là une propriété générale sur l'interpolation des polynômes algébriques de degré p au moyen de formules lagrangiennes de degré $p-1$.

III. 5,4 — Formules linéaires pour les champs réduits.

Pour une sous-maille de 20 km de côté, la grandeur maximum du terme du second ordre est sensiblement :

$$20 \text{ m} \times (0,1 \times \sqrt{2})^2 \neq 40 \text{ cm}$$

et pour 10 km de côté, le quart du précédent, soit

$$\neq 10 \text{ cm}$$

Ces précisions peuvent être suffisantes pour certaines catégories de travaux.

On a construit, au voisinage du sommet ω , deux sous-mailles emboîtées de 20 km et 10 km respectivement de côté (voir figure 3).

Appliquant la formule ci-dessus, on vérifie numériquement l'existence des résidus de (08 ; 40) cm aux sommets de la plus grande; on s'assure en même temps que la formule linéaire est exacte en son point central. Ainsi prend-on connaissance des conditions d'emploi d'une formule linéaire, particulièrement avantageuse pour des calculs non automatisés (c'est-à-dire exécutés par un calculateur).

INDEX DES PRINCIPALES FORMULES POUR LA PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I

	Observations	Page
(1) $y(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i y_i$		5
(2) $\alpha_i = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_p)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_p)}$	Formule générale de Lagrange	5
(3) $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$		5
(4) $y(x) = \sum_i y_i \beta_i : \sum \beta_i$	aspect modifié	6
(5) $y(x) = \sum_i y_i \frac{\gamma_i}{x-a_i} : \sum \frac{\gamma_i}{x-a_i}$	γ_i = indépendants de x	6
(6) $\gamma_i = 1 / \prod_{j=1}^{(j)} (a_i - a_j)$		6
(10) $\beta_i = \frac{(-1)^{p-1-i} C_{p-1}^i}{x-a_i}$		6
(10 bis) $\sum \beta_i = (p-1)! / \prod_p (x-a_i)$	Base rectiligne équidistante	6
(11) $Y = \left[\sum \beta_i y_i + \frac{1}{p} \frac{d^p Y}{dx^p}(\theta) \right] : \sum \beta_i$	(formule écrite avec le reste)	7
(12) $\beta_i = \frac{a_i}{z-a_i} \quad (a_i^p = 1)$	Base polygone régulier sans le centre	7
(13) $U(z) = \left[\sum U_i \frac{1}{z-a_i} - U_\omega \frac{p}{z-\omega} \right] : \left[\sum \frac{1}{z-a_i} - \frac{p}{z-\omega} \right]$	... avec le centre	8
Transition avec la formule du contour circulaire de Cauchy		
(14) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t-z} dt$		8
(15) $f(z) = \int f(t) \beta(t) dt : \int \beta(t) dt$		8
(16) $\int \beta(t) dt = \int_c \frac{dt}{t-z} = \log(t-z)_\sigma = 2\pi i$		8
(19) $U_A = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left\{ \frac{d \log r}{dn_E} U + V \frac{d \log r}{ds} \right\} ds$		8
(22) $U_A = \frac{1}{2\pi R} \int_c U \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} dS = \frac{1}{2\pi R} \int U \frac{r'}{r} dS$	Formule de Poisson (contour circulaire)	8

- (25)
$$\frac{y_{(\infty)}}{(x-a_1)\dots(x-a_p)} + \frac{y_1}{(a_1-a_2)\dots(a_1-a_p)(a_1-x)} + \dots + \frac{y_p}{(a_p-a_1)\dots(a_p-a_{p-1})(a_p-x)} = 0$$
 aspect symétrique de la formule de Lagrange 9
- (26)
$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} = 0$$
 identité de Lagrange 9
- (29)
$$y(x)_{[abc]} = \frac{x-c}{a-c} y(x)_{[ab]} + \frac{x-a}{c-a} y(x)_{[bc]}$$
 Propriété de composition des interpolées successives 10
- (30)
$$y(x)_{[abcd\dots l]} = y(x)_{[abc\dots l]} \frac{x-c}{a-c} + y(x)_{[c b d \dots l]} \frac{x-a}{c-a}$$
 10
- (32)
$$\frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-c)(b-a)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)} = (CBA) = (ACB)$$
 Définition différence divise 11
- (38)
$$(ABCDX) = \frac{1}{(x-c)(x-d)} \frac{\frac{X-X_a}{x-a} - \frac{X-X_b}{x-b}}{a-b} = \frac{1}{(x-c)(x-d)} (X X_a X_b)$$
 Composition 11
- (39)
$$y_{[abcdefg]}(x) = y_{(a)} + [AB](x-a)(x-b) + (ABC)(x-a)(x-b)(x-c) + \dots + [ABCFG](x-a)(x-b)\dots(x-f)(x-g)$$
 12
- (40)
$$y_{[abcdefg]}(x) = y_{(a)} + [AB](x-a)(x-b) + (ABC)(x-a)(x-b)(x-c) + \dots + \frac{(x-a)(x-b)\dots(x-f)}{(g-a)(g-b)\dots(g-f)} \left\{ y_{(g)} - y_{[bcd f]}(g) \right\}$$
 12
- (41)
$$y(x) \{ABCD\} = y(x) \{BC\} + \frac{(x-d)(x-b)(x-c)}{(a-d)(a-b)(a-c)} \eta_a + \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} \eta_0$$
 Expression de la formule d'Everett à 4 points 12
- (42)
$$(abcde) = \alpha_i (abc) + \alpha_j (bcd) + \alpha_k (cde)$$
 Composition plus générale des interpolations 13
- (44)
$$(abcde) = \left\{ \frac{\gamma_i}{(x-a)(x-b)} (abc) + \frac{\gamma_j}{(x-b)(x-d)} (bcd) + \frac{\gamma_k}{(x-d)(x-e)} (cde) \right\} : \sum \beta_i$$
 15

$$\sum \gamma_i = 0$$
- $$\underline{\underline{i}} = \underline{\underline{d}} \overrightarrow{IA} + \underline{\underline{a}} \overrightarrow{DI}$$
 Formule de l'interpolation linéaire complexe

Reste de Lagrange

$$[Z \ ABC \ \dots \ IL] = \frac{U^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!}$$

θ est barycentre du groupe $Z \dots L$,
 si U est assimilable à un polynôme
 de degré $\leq p+2$

$$(1) \quad \frac{dU}{dz} = + \frac{\frac{\delta X}{\delta x}}{i \frac{\delta Y}{\delta x}} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\delta Y}{\delta y}}{-\frac{\delta X}{\delta y}}$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = + \frac{\frac{\delta^2 X}{\delta x^2}}{i \frac{\delta^2 Y}{\delta x^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\delta^2 Y}{\delta x \delta y}}{\frac{\delta^2 X}{\delta x \delta y}} \quad \text{ou} \quad - \frac{\frac{\delta^2 X}{\delta y^2}}{\frac{\delta^2 Y}{\delta y^2}}$$

$$\frac{d^3 U}{dz^3} = + \frac{\frac{\delta^3 X}{\delta x^3}}{i \frac{\delta^3 Y}{\delta x^3}} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\delta^3 Y}{\delta x^2 \delta y}}{\frac{\delta^3 X}{\delta x^2 \delta y}} \quad \text{etc...}$$

$$(2) \quad D = \frac{1}{2} \left(\delta_{-\frac{1}{2}} + \delta_{+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \left(\delta_{-\frac{3}{2}} + \delta_{+\frac{3}{2}} \right) \dots$$

$$\dots + \frac{2}{120} \frac{1}{2} \left(\delta_{-\frac{5}{2}} + \delta_{+\frac{5}{2}} \right)$$

$$D^2 = \delta_0^2 - \frac{1}{12} \delta_0^4 + \frac{1}{90} \delta_0^6$$

$$D^3 \dots \dots \dots , \quad D^4 \dots \dots \dots$$

Formules donnant les dérivées en fonction des différences centrales (fonctions d'une variable)

(3) Tableau (3) : formules des coefficients du développement en série d'après les valeurs aux sommets et au centre d'un carré

$$(4) \quad \mathcal{L}_x + 4 \mathcal{L}_+ = 0$$

Propriété relative au groupe de 9 points (si $a_0 = 0$)



$$(5) \quad z = z' (\sqrt{2}; \pi/4) = D z'$$

$$z^2 = \dots = D^2 z'$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{4} \right) a_1 = d a_1'$$

$$a_2 = \dots = d^2 a_2'$$

etc....

$$(6) \quad D = \dots (+1; +1) \quad d = (+0,5; -0,5)$$

$$D^2 = (0; +2) \quad d^2 = (0; -0,5)$$

$$D^3 = (-2; +2) \quad d^3 = .. (-0,25; -0,25)$$

Formules du changement d'axes diagonal

$$(7) \quad a_1 = (\alpha; \beta) = (0,5; -0,5) (\alpha'; \beta')$$

$$(8) \quad a_2 = (\gamma; \delta) = (0; -0,5) (\gamma'; \delta')$$

$$(9) \quad a_1 = \frac{1}{2} \left[\delta_{\omega} (U) + \delta_{\omega} \frac{U}{i} \right] = \frac{dU}{dz} (\omega)$$

Formule pour le coefficient du 1er degré ou dérivée première

Schéma



$$(10) \quad a_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\underline{\delta(s)} + \underline{\delta(i)} \right] (U) + \frac{1}{2} \left[\underline{\delta(G)} + \underline{\delta(D)} \right] \frac{U}{1} \right] = \frac{dU}{dz} (\omega)$$

$$(11) \quad a_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \underline{\delta_\omega^2} (U) + \frac{1}{2} (-1) \underline{\delta_\omega^2} (U) \right] = \frac{1}{2} \left[U_a + U_c - (U_b + U_d) \right] = \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dz^2}$$

$$(12) \quad a_2 = \frac{1}{2} \left[\underline{\delta} \left(\underline{\delta Y} \right) - i \underline{\delta} \left(\underline{\delta X} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dz^2}$$

$$(13) \quad a_3 = \frac{1}{3!} \frac{d^3 U}{dz^3} = \frac{1}{2} \left[\underline{\delta_\omega} (U) - \underline{\delta_\omega} \frac{U}{1} \right]$$

$$(14) \quad \xi = \frac{1}{4!} \frac{1}{4} U^{IV} = \frac{1}{96} U^{IV} (\omega)$$

$$(15) \quad \eta_{ij} = \pi_{\frac{\sigma}{s}} (i-a) \frac{U^x}{5!} (\theta) = \frac{U^x}{4!}$$

$$(16) \quad \begin{array}{ccccc} & & \square & & \square \\ & & \times & & \\ (16,1) & & & & (16,2) \\ & \square & \square & \square & + & \square \\ & \square & \square & \square & & \square \end{array}$$

$$(17) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \times & & & & \\ & \square & & \square & & \square & \times & \square \\ & & & \square & & \square & & \square \end{array}$$

$$(18) \quad \begin{array}{ccc} & & \square \\ & \square & + & \square \end{array}$$

$$(19) \quad a_2 = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 U}{\delta x \delta y} = \left[\frac{1}{2} (U_a + U_c) - \frac{1}{2} (U_b + U_d) \right] = 0$$

$$(20) \quad \eta_{\star} = L_{\omega ABA'} (z) \times \eta_{A'}$$

Schéma



Formule pour le coefficient du 2ème degré (ou dérivée 2*/2!)

Schéma



Schéma



Schéma



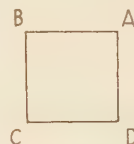
Sous-tabulation binaire
Reste de la formule à 4 points
si le côté du carré est unité de longueur

Reste de la formule à 5 points au point médian d'un côté du carré.
Demi-côté du carré : unité de longueur

Formules de sous-tabulation binaire pour les dispositifs dans la base carrée jusqu'à 5 points

Critère pour une interpolation linéaire.

Schéma :



Reste dans l'interpolation Lagrangienne du 2ème degré appuyée sur 3 sommets d'un carré ω AB (A')

DEUXIÈME PARTIE

EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMÉRIQUES
A LA CONSTRUCTION DES CARTES (projections)

DEUXIÈME PARTIE

EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMÉRIQUES A LA CONSTRUCTION DES CARTES (projections)

CHAPITRE III GENERALITES SUR LES CHANGEMENTS DE PROJECTION CONFORME

CHAPITRE IV ETUDE DES PRINCIPAUX CAS D'APPLICATION : FORMULES PARTICULIERES ET DISCUSSION NUMERIQUE

CHAPITRE V COORDONNEES HYPERBOLIQUES

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

(NOTA : Les titres ont été traduits en français, sauf pour les ouvrages de langue anglaise.)

- GAUSS : "Recherches générales sur les surfaces courbes"
- J. LABORDE : Tome IV du "Traité des Projections des Cartes Géographiques", et son cours à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques, notamment : étude de la représentation conforme d'une surface sur la sphère osculatrice (... de même courbure totale N. d. A.)
- P. ALLARD : "Projection conforme de déformation stationnaire le long d'une courbe", Thèse Fac. des Sciences, Université de Paris, 1948.
- JORDAN : "Handbuch der Vermessungs Kunde", III Band
En particulier, Ch. V coordonnées sphériques, et Ch. VIII coordonnées sphéroïdiques.
Cite un mémoire de
SCHOLS : "Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'Equateur" - Annales de l'Ecole Polytechnique de DELFT, 1ère livraison, LEYDE, 1884.
- W. HRISTOW : Différents articles publiés dans *Zeitschrift für Vermessungs wesen* (Z f V.) contenant l'étude exhaustive de la projection Mercator Transverse dite de GAUSS KRUGER
Notamment :
- 1 - Sur la transformation des coordonnées de Mercator et de Gauss en coordonnées coniques conformes et inversement (1935, Fasc. 5)
 - 2 - Transformation entre deux fuseaux de GAUSS voisins (1938, Fasc. 17 et 19)
 - 3 - Calcul de Δx et Δy etc ... en fonction de la longueur et l'azimut, pour un arc géodésique, sur une surface quelconque rapportée à un système isotherme quelconque (1937, Fasc. 6)
- etc
- G. EOAGA : "Sur le transport des coordonnées curvilignes le long d'un arc de géodésique, sur une surface quelconque, avec application au problème géodésique du transport des coordonnées géographiques", Florence, "UNIVERSO", Anno XX N° 7, 1942.
- W. GROSSMANN : "Sur la transformation des coordonnées de Gauss-Krüger à l'aide de machines à calculer" (Z. f. V., 1935, Fasc. 12 et 13)
- TABLES NUMERIQUES : "Universal Transverse Mercator Grid, Zone-to-Zone Transformation tables", A.M.S. Technical Manuel, Washington, 1951.
- A. MARUSSI : "Développement de Legendre généralisé pour une courbe quelconque tracée sur une surface quelconque"
"Développement de Legendre généralisé à l'espace"
CR Ac Lincei, Série VIII, Vol. VIII, fasc. 4 et 5, 1950.

BIBLIOGRAPHIE PARTICULIERE AUX DERNIERS TITRES DE LA IIème PARTIE

Coordonnées hyperboliques

DRIENCOURT et LABORDE

: Traité des projections des cartes Géographiques, Fascicules I, II et IV (d'après GUYOU)

O. ADAMS

: "Elliptic Functions applied to world Maps"

Coast et Geodetic Survey, Washington, 1925. Spec. Publication N° 112

Méthodes de relaxation ou de résolution itérative du problème de LAPLACE

LIEBMANN

: "L'obtention approchée des fonctions harmoniques, et la représentation conforme (selon les idées de BOLTZMANN et JACOBI)"

Akadem. d. Wissensch. Munich, 1918.

CHRISTOPHERSON et SOUTHWELL

: "Relaxation methods applied to problems involving two independent variables."

Proc. Roy. SocY London, 1938 (A)

GANDY et SOUTHWELL

: "Conformal representation of a region in Plane Space"

Phil. Transact. Roy SocY London 1940.

M. KORMES

: "Numerical solution of the boundary value problem for the potential equation by means of punched cards"

Review of Scientific Instruments, Vol. 14, Août 1943.

FROCHT

: "The numerical solution of LAPLACE equation in composite rectilinear Areas."

Journ. Appl. Physics, Sept. 1946.

etc

INTRODUCTION

L'application des méthodes et des résultats ci-dessus établis se présente en cartographie à propos des changements de coordonnées.

Sur la Terre, considérée soit comme Sphère, soit comme Ellipsoïde de Révolution, les positions sont définies par rapport à des systèmes de coordonnées qui, généralement, découpent la surface terrestre en carreaux infiniment petits (systèmes de coordonnées isothermes), afin de se prêter commodément à la mesure et au report des angles et des distances, opérations fondamentales de la triangulation.

Ces systèmes de coordonnées, traduits sur le plan cartésien et utilisés pour le report des positions des points géodésiques et des détails du terrain, sont le support des cartes topographiques. Chaque carte topographique est donc établie sur un système de coordonnées qui lui est propre; dans un usage assez répandu, ce système de coordonnées cartésien est effectivement tracé, et constitue le carroyage.

Il se pose alors la question de pouvoir directement passer de l'un de ces systèmes à un autre, sans user de l'intermédiaire de la surface terrestre elle-même.



En Géodésie et en Cartographie, les méthodes de représentation conforme plane les plus utilisées sont :

- a) les représentations coniques, dites de LAMBERT, qui intéressent des zones centrées sur un certain parallèle de base, limitées en latitude, mais prolongées en longitude autant qu'il peut être nécessaire.
 - b) les représentations de MERCATOR TRANSVERSE, intéressant des fuseaux de longitude, centrés sur un certain méridien de base.
 - c) on rencontre aussi, moins fréquemment, des projections conformes établies sur une ligne géodésique quelconque comme base : ces projections s'appellent MERCATOR oblique.
- À la différence des précédentes, on ne les trouve pas en cartographie ou en Géodésie, organisées sous forme de familles ou systèmes continus, recouvrant des grandes étendues.

Il est important de noter que les coordonnées géographiques, Latitude et Longitude, constituent elles-mêmes un système de référence qui est obligatoirement représenté sur toutes les cartes. Ce système de coordonnées s'associe à celui des coordonnées de MERCATOR, qui utilise aussi les méridiens et parallèles comme lignes coordonnées, mais la Latitude Croissante étant la variable ici associée à la Longitude, et constituant avec elle le système isotherme.

Ce système des coordonnées MERCATOR constitue le cas extrême de la famille des représentations coniques de LAMBERT.

Les fonctions complexes, dont on s'occupera ci-après, sont donc celles qui correspondent au passage :
entre 2 projections d'une même famille a), b), ou c)
entre 2 projections de familles différentes
entre une projection a), b) ou c), et la projection de MERCATOR

Pratiquement, ces passages s'effectuent à l'aide de formules de développement en série analytique

$$U_0 + \Delta U = U_0(z_0) + \alpha \Delta z + \beta \Delta z^2 + \gamma \Delta z^3 + \dots$$

centrées autour d'un point choisi.

L'on demande à calculer les coefficients de ces développements, pour pouvoir utiliser ensuite à leur sujet les méthodes d'interpolation complexe qui ont été traitées dans la première partie.

En fait, il suffira de calculer, avec une précision approximative, l'ordre de grandeur des coefficients successifs. Les méthodes d'interpolation numérique ci-dessus établies permettent en effet d'éviter le calcul effectif de coefficients (calcul qui est remplacé par l'utilisation d'un certain nombre de couples de points U, z calculés numériquement par les formules de base des projections respectives) mais à condition de détenir un critère, pour déterminer le degré de la formule convenant à tout champ et à toute précision donnés.

Ce qui suit est donc l'étude des coefficients des développements analytiques, de centres arbitraires, correspondant aux passages éventuels entre les divers systèmes de projection énumérés plus haut.

GÉNÉRALITÉS SUR LES CHANGEMENTS DE PROJECTION CONFORME

I. DESCRIPTION RÉCAPITULATIVE DES PROJECTIONS CONSIDÉRÉES

I. 1 -- PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE POLAIRE ET PROJECTION DE MERCATOR.

La projection stéréographique polaire est une projection conforme de la sphère ou du sphéroïde sur le plan, qui représente les parallèles par des cercles concentriques centrés au point image du pôle, de rayon S , et les méridiens par les rayons rectilignes issus de ce centre. Il est bien connu, et l'on peut immédiatement vérifier, que la correspondance complexe

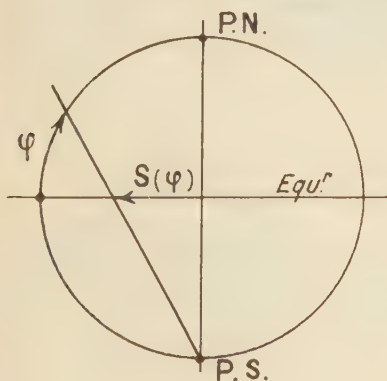
$$U = -\log z \quad U : \text{plan Mercator} \quad z : \text{plan stéréographique}$$

fait passer de cette projection à la projection classique de Mercator où les méridiens sont des droites parallèles équidistantes, les y étant homogènes à des longitudes. L' x de la projection de Mercator est donc

$$x = -\log S_{(\varphi)} = \text{notation } \mathcal{L}_{(\varphi)} = \text{"latitude croissante"}$$

ETABLISSEMENT DES FORMULES, CAS DE LA SPHERE ET CAS DE L'ELLIPSOÏDE DE REVOLUTION

Pour la sphère, la projection stéréographique polaire admet une définition géométrique simple, comme projection perspective prise du pôle opposé, sur l'équateur ou un plan parallèle à celui-ci, ce qui détermine



aussitôt la loi des rayons $S_{(\varphi)}$ (voir figure)

$$S_{(\varphi)} = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

d'où la latitude croissante de Mercator

$$(1) \quad \mathcal{L}_{(\varphi)} = - \left[\log S_{(\varphi)} - \log S_{(\varphi_0)} \right] = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Si l'on aborde la question à partir de la définition directe de la projection de Mercator par rapport à la surface courbe, c'est-à-dire la latitude croissante étant définie comme la variable isotherme associée à la longitude, on trouve la condition

$$\frac{d \mathcal{L}_{(\varphi)}}{d \mathcal{M}} = \frac{d \lambda}{d \mathcal{F}} = \frac{1}{r_{(\varphi)}}$$

où $d \mathcal{M}$ et $d \mathcal{F}$ sont des éléments d'arc respectivement sur le méridien (correspondant à $d \lambda$) et sur le parallèle (correspondant à $d \varphi$), la valeur commune des deux rapports étant $\frac{1}{r_{(\varphi)}}$ où r est le rayon du parallèle de latitude φ .

Pour la sphère, la latitude croissante répond donc à la définition

$$d \mathcal{L}_{(\varphi)} = \frac{d \varphi}{\cos \varphi} \quad \text{d'où } \mathcal{L}_{(\varphi)} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

comme précédemment.

Sur l'ellipsoïde, on a pour la variable de Mercator

$$d\mathcal{L}(\varphi) = \frac{r}{\rho} d\varphi$$

$$\text{où } \rho = \frac{d\mathcal{M}}{d\varphi} = \text{rayon de courbure méridien}$$

$$= \frac{N \cos \varphi}{\rho} d\varphi \quad N = \text{grande normale}$$

$$(1 \text{ bis}) \quad \mathcal{L}(\varphi) = \int \frac{\cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \dots\dots$$

en vertu des propriétés de l'ellipse

$$\rho/N = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

et le rayon stéréographique $S(\varphi)$ est l'exponentielle de cette fonction $\mathcal{L}$; il n'admet pas d'expression plus simple ayant une interprétation géométrique.

PASSAGE AUX COORDONNEES GEOGRAPHIQUES

La projection de Mercator joue un rôle important dans les études sur toutes les autres projections conformes, en ce sens qu'appartenant à la même classe, c'est-à-dire liée à elles par des relations complexes $U=f(\lambda)$ utilisables, elle permet d'obtenir facilement les coordonnées géographiques, par passage de $\mathcal{L}(\varphi)$ à φ en fin de calcul. Or, ces coordonnées géographiques φ et λ , qui ne forment pas un quadrillage isotherme sur les surfaces sphéroïdes, jouent un rôle important en Géodésie, puisqu'elles définissent la direction de la verticale d'un point, mesurable par des observations astronomiques, et en Cartographie où leur emploi est obligatoire. Dès lors, le problème de la transformation des coordonnées rectangulaires aux coordonnées géographiques est une question fondamentale pour l'emploi de toute projection. Dans ce qui suit, ce problème est traité par l'intermédiaire de la projection de Mercator et envisagé sous cet angle; il s'inscrit dans la catégorie générale des changements de système de projection conforme.

I. 2 — PROJECTIONS CONIQUES CONFORMES, DITES DE LAMBERT.

Ces projections sont d'une même famille avec la projection stéréographique Polaire, les parallèles de latitude étant représentés par des cercles concentriques et les méridiens par des lignes radiales équidistantes émanant du centre.

Elles se déduisent de la projection stéréographique par la correspondance complexe :

$$U_{(\text{Lambert})} = z_{(\text{stéréogr})}^n \quad 0 < n < 1$$

Dans ces projections, le pôle Nord est un point singulier à distance finie où la représentation n'est pas conforme, l'angle 2π y étant traduit par un angle $n 2\pi$ et où l'échelle croît indéfiniment.

La loi d'espacement angulaire des méridiens, dans une de ces projections, qui est

$$\Delta \theta = n \Delta \lambda$$

coïncide avec la loi d'espacement des méridiens sur le développement plan d'un cône d'angle d'ouverture $\varphi_0 = \arcsin n$, et qu'on peut concevoir, par conséquent, comme un cône circonscrit au sphéroïde à la latitude φ_0 . Il est facile de comprendre que si l'on envisage une projection géométrique, réalisée par un procédé assez arbitraire, de la surface du sphéroïde sur une zone infiniment étroite de part et d'autre du parallèle de contact, cette projection est extrêmement proche de la représentation conforme précédemment définie.

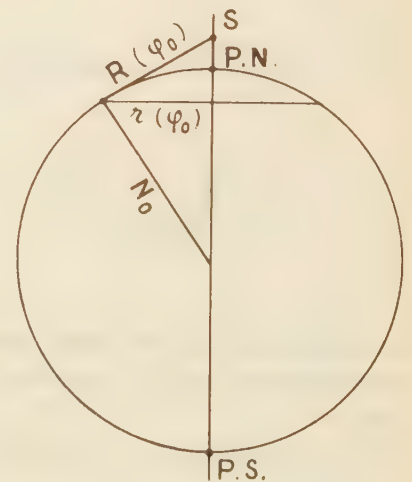
D'où le nom donné à celle-ci de projection "conique" conforme, et la désignation de parallèle "moyen" (ou parallèle "central") de cette projection, qui est donnée au parallèle de latitude $\varphi_0 = \arcsin n$.

Dans le plan de la projection conforme, ce parallèle central est représenté par un cercle de rayon R_0 (voir figure) = $N_0 \operatorname{tg} \varphi_0$ si R_0 est l'apothème du cône et si l'on fixe l'échelle de la carte à la valeur un sur le parallèle central.

Le rayon $R(\varphi)$ du cercle représentant le parallèle de latitude φ se déduira du précédent par la formule

$$(2) \quad R(\varphi) = R_0 \left[\frac{S(\varphi)}{S(\varphi_0)} \right]^n$$

où $S(\varphi)$ est le rayon stéréographique; cette formule étant valable aussi bien pour une projection de la sphère ou d'un ellipsoïde de révolution.



De cette formule résulte l'appellation d'exposant qui est donnée à n par certains auteurs (Lambert, Laborde ...). Le passage d'une projection conique z , d'exposant n , latitude de parallèle central φ_0 à une autre voisine U , d'exposant n' , latitude centrale φ'_0 , se traduit par la formule générale

$$U = z^{\frac{n'}{n}} = z^{1+\alpha} \quad (\alpha \text{ petit, positif si } \varphi'_0 > \varphi_0)$$

écrite ici sans dimension métrique. Pour l'usage pratique, on introduit R_0 (rayon ou projection du parallèle central φ'_0 sur la projection U), R_1 (rayon en projection du même parallèle φ'_0 sur la projection z)

$$(3) \quad U = R_0^1 \left(\frac{z}{R_1} \right)^{1+\alpha}$$

A la limite, le passage de la projection z , conique, d'exposant n , à la projection de Mercator U , s'exprime par la formule

$$(4) \quad U = -\frac{1}{n} \text{Log } z/R$$

où U conserve la dimension d'un logarithme complexe (c'est-à-dire la partie imaginaire ayant la dimension d'un angle) et où R est le rayon de la projection Lambert pour l'équateur.

Dans tout ce qui précède, on a considéré les fonctions $R(\varphi)$ (exposant n) comme liées les unes aux autres et définies à partir de l'une d'entre elles par la formule de puissance. La fonction de base choisie est le rayon stéréographique, exponentielle de la latitude croissante $\mathcal{L}(\varphi)$, qui est calculée à partir de sa formule propre.

Toutefois, dans la pratique, il est utile de connaître des formules qui définissent directement une projection conique d'exposant n quelconque au voisinage de son parallèle de base φ_0 . On recherche l'expression du rayon vecteur $R = R_0 - \Delta R$, en fonction de la distance méridienne vraie ΔS à la ligne de base, de telle sorte que, en $\frac{dR}{ds}$, on reconnaitra l'échelle de la projection, quantité d'une importance essentielle pour la pratique.

L'obtention de cette formule $\Delta R = f(\Delta S)$ s'établit par développement en série, en partant de l'équation aux dérivées partielles du 2ème ordre (équation de POISSON), qui régit le problème des projections conformes. Nous utiliserons ici les résultats réunis par M. ALLARD dans sa Thèse. (1)

La formule d'ALLARD est :

$$(5) \quad \left(-\frac{dR}{ds} \right) = +\frac{1}{2!} C \Delta s^2 + \frac{1}{3!} C \cdot \Gamma_0 \cdot \Delta s^3 + \dots$$

où C est la courbure totale au point central et Γ_0 la courbure géodésique du parallèle moyen. Formule de R_0 par intégration terme à terme.

I. 3 — PROJECTION DE MERCATOR TRANSVERSE.

La définition de cette projection pour la sphère est fournie par le nom lui-même: l'échange de l'Equateur avec un méridien (ou avec un grand cercle quelconque = cas des projections de MERCATOR oblique) ne touche en rien les caractères géométriques du problème.

Dans les formules de la projection de MERCATOR ...

$x = M$ (ou λ = longitude)

$$(6) \quad y = \mathcal{L}(\varphi) \text{ (Latitude croissante)} = f(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log \text{tg} (\pi/4 + \varphi/2) = G u d^{-1} \varphi$$

il suffit de substituer aux λ et φ les coordonnées sphériques par rapport au nouveau pôle, au moyen des formules classiques de trigonométrie sphérique - le changement de variable étant, pour le cas du MERCATOR TRANSVERSE, spécialement simple (triangles sphériques rectangles).

On trouve ainsi, conservant les mêmes désignations d'orientation d'axes :

$$(7) \quad \begin{cases} x = G u d^{-1} u = G u d^{-1} (\text{Arc sin} (\sin \lambda \cos \varphi)) = \text{Arg th} (\sin \lambda \cos \varphi) \\ y = -\text{Arc tg} (\cotg \varphi \cos \lambda) + \pi/2 \end{cases}$$

L'important est qu'on dispose de formules finies, exprimant les coordonnées planes en fonction des coordonnées sphériques.

Pour l'ellipsoïde de révolution, la définition employée est "projection conforme admettant le méridien pour courbe de base (au sens de M. ALLARD, voir ci-dessus)".

(1) Pierre ALLARD : "La projection conforme de déformation stationnaire le long d'une courbe." Univ. de PARIS, Juin 1948.

Par la même méthode générale mentionnée ci-dessus à propos des projections coniques conformes, l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de l'échelle avec ses conditions aux limites, fournit, dans la bande utile de chaque fuseau, et sous forme de développements en série, les expressions des coordonnées rectangulaires en fonction des coordonnées géographiques.

On ne dispose pas ici de formules explicites finies, différence importante par rapport au cas de la sphère; néanmoins, on peut, du cas présent, se ramener au précédent, étant donné la proximité géométrique de l'ellipsoïde terrestre avec une sphère.

Une discussion classique (1) fait connaître les écarts (dans les coordonnées) entre la projection "sphérique" et la projection "ellipsoïdale". De la sorte, dans la plupart des cas de la pratique, on pourra utiliser l'avantage des formules explicites de la représentation MERCATOR TRANSVERSE de la sphère.

I. 4 — PROJECTION DE MERCATOR OBLIQUE.

Les mêmes considérations peuvent être appliquées au problème de la projection de MERCATOR oblique :

formules explicites, dans le cas de la sphère

dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, formules développées en série qui peuvent être rapprochées de formules sphériques convenables.

II. MÉTHODES GÉNÉRALES D'OBTENTION DES COEFFICIENTS DES DÉVELOPPEMENTS ANALYTIQUES REPRÉSENTANT LES CHANGEMENTS DE PROJECTION

La méthode générale de travail mentionnée ci-dessus à l'introduction de la 2ème partie est essentiellement fondée sur la construction préliminaire d'une grille de base, obtenue par des calculs numériques directs, et son utilisation par des interpolations complexes à 4 ou 5 points, étudiées dans la première partie. L'emploi de telle ou telle de ces formules est justifié sitôt qu'on connaît l'ordre de grandeur du reste, qui dépend lui-même des dérivées 4ème ou 5ème de la formule complexe de passage. Or cette évaluation de dérivées est possible si l'on connaît les coefficients du développement analytique représentatif

$$(8) \quad U(z_0 + \Delta z) = U_0 + \alpha \Delta z + \beta \Delta z^2 + \text{etc ...}$$

en un seul point donné, z_0 , de la zone à transformer, ou du voisinage immédiat de celle-ci. Il n'est donc pas indispensable de connaître les expressions explicites de ces coefficients pour tout centre arbitraire quelconque.

Usant de cette liberté, l'on traitera (au Chapitre IV ci-après) le problème de la correspondance d'une projection conforme à une autre, en profitant des propriétés particulières de chaque problème, qui permettront de le résoudre aisément, sous la condition d'accepter comme centre de la formule de développement analytique, un certain point particulier, imposé par le problème.

Ces cas de résolution directe sont les suivants :

II. 1 — CAS OU UNE LIGNE DROITE EST GLOBALEMENT CONSERVÉE.

Si l'on sait a priori qu'une certaine ligne donnée de la surface courbe est représentée par une ligne droite dans les deux plans de projection U et z , et adoptant comme axes réels les images rectilignes respectives, écrivant $x = x(s)$ $X = X(s)$ les représentations planes en fonction d'un paramètre descriptif de la courbe sur la surface, on trouve, en éliminant le paramètre entre x et X , les relations

$$X = F(x) \quad x = f(X)$$

qui définissent la correspondance ponctuelle le long de l'axe réel.

Ces relations à coefficients réels s'étendent aux variables complexes U et z , de sorte que le problème est résolu par les formules

$$U = (X + iY) = F(z) = F(x + iy) \\ z = (x + iy) = f(U) = f(X + iY)$$

(1) Effectuée en détail par LABORDE dans ses divers écrits.

Nous supposons ici que les relations $X \rightarrow x$ soient connues sous forme de développement en série convergente à coefficients réels, ayant pour origine un point quelconque (non singulier) P, de l'axe réel. De tels développements sont en effet disponibles dans la pratique, comme on le verra plus loin au Chapitre IV. Dès lors, cette méthode fournit les formules de transformation centrées en ce même point P arbitraire de l'axe réel, et leur région de validité est une région symétrique par rapport à celui-ci, et bornée dans les deux sens.

La solution ainsi obtenue est effectivement utilisable en Géodésie, où les plans de projection ne sont pas utilisés loin de la ligne qui sert d'axe réel.

Les indications précédemment données sur la description des projections géodésiques usuelles font prévoir que cette méthode s'applique au cas du passage de Mercator Transverse à une projection conique (ou de Mercator), le méridien central de la projection Mercator Transverse ayant des images rectilignes dans les deux plans.

II. 2 — CAS OU L'ON CONNAIT PAR AVANCE LA REPRÉSENTATION SUR LE PLAN U D'UNE LIGNE DROITE DU PLAN Z.

Si l'on suppose connue par avance la description paramétrique

$$X = f(x)$$

$$Y = g(x)$$

d'une ligne (C) du plan U, image de l'axe réel du plan z, les équations étant des expressions développées réelles

$$(9) \quad \begin{cases} X = X_0 + a x + b x^2 + c x^3 + \dots \\ Y = Y_0 + a' x + b' x^2 + c' x^3 \end{cases}$$

il est clair que la formule complexe

$$(10) \quad U = X + iY = (X_0 + iY_0) + (a + ia')(x + iy) + (b + ib')(x + iy)^2 + \dots$$

résout le problème recherché, le centre de la formule étant un point quelconque de la ligne C.

Dans les projections géodésiques, les lignes que l'on sait représenter et dont les formules sont directement équipées par des tables numériques, sont les méridiens et les parallèles et les lignes géodésiques. La méthode énoncée ci-dessus permet donc notamment de traiter le passage d'une projection ayant un méridien, ou une géodésique quelconque comme ligne de base, à une autre projection classique quelconque. Mais toujours avec la réserve d'avoir à accepter comme centre de la formule de passage un point de cette ligne de base.

II. 3 — RECOURS A L'INTERMÉDIAIRE D'UNE PROJECTION AUXILIAIRE.

La simplicité d'emploi des deux premières méthodes suggère de chercher à les étendre au problème général en introduisant une projection auxiliaire. Ainsi, par exemple, pour calculer une formule de passage entre deux fuseaux Mercator Transverse, avec un centre arbitraire P, on introduirait une projection Mercator Transverse auxiliaire dont le méridien central passe par P, pour laquelle la formule de passage à chacune des deux autres est fournie par la 2ème méthode ci-dessous.

Etant donné deux transformations complexes successives

$$x \rightarrow z$$

$$z \rightarrow u$$

connues par les coefficients de leur développement analytique, les coefficients de la transformation directe $x \rightarrow u$ se calculent aisément, et bien que les coefficients de rang lointain affectent une structure relativement complexe, il est facile d'évaluer leurs ordres de grandeur en fonction des composants.

L'application de ce procédé de composition des transformations combiné aux deux précédents, permet de résoudre en principe tous les cas, avec des formules qui conviennent bien aux calculs numériques.

Ce sont ces trois méthodes qui seront appliquées systématiquement dans le Chapitre IV pour traiter les problèmes de changement de projection géodésique, permettant de trouver, par des calculs directs, les coefficients des développements analytiques jusqu'aux rangs quatre et cinq inclus, et d'estimer le reste de la série.

II. 4 — UTILISATION DES RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LE TRACÉ DES IMAGES DE LIGNES GÉODÉSIQUES EN PROJECTION CONFORME.

Il s'agit ici d'un aspect particulier de la méthode b). On a vu plus haut qu'une formule de passage centrée en un point quelconque P (x_0, y_0 dans le plan z, X_0, Y_0 dans le plan U) est acquise dès qu'on connaît la représentation paramétrique dans le plan z de l'image de la ligne droite $X = X_0$ du plan U, laquelle est une ligne géodésique de ce plan. Le problème ainsi énoncé peut être résolu par la méthode de développement en série, appliquée au système des équations différentielles des géodésiques du plan U représentées dans le plan z; ce système

différentiel dépendant lui-même de l'expression du ds^2 du plan z en fonction des paramètres X et Y du plan U , l'expression qui prend la forme

$$(11) \quad ds^2 = \frac{1}{m^2} (dX^2 + dY^2) \quad m(X, Y) = \text{échelle du plan } U \text{ par rapport au plan } z$$

puisque la relation entre les deux plans est ici une représentation conforme.

Pour le cas particulier de la représentation conforme, le système des équations différentielles des géodésiques se simplifie beaucoup. Il prend la forme :

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= \frac{\partial \log m}{\partial x} (x'^2 - y'^2) + \frac{\partial \log m}{\partial y} 2 x' y' \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= - \frac{\partial \log m}{\partial y} (x'^2 - y'^2) + \frac{\partial \log m}{\partial x} 2 x' y' \end{aligned} \quad (x' \ y' \text{ désignant les dérivées})$$

qui se condense en une seule équation complexe

$$(13) \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = \alpha \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \quad \dots \quad \alpha = \frac{\partial \log m}{\partial x} - i \frac{\partial \log m}{\partial y}$$

équation complexe qui permet par dérivations successives d'obtenir, en fonction des éléments initiaux $x, y, \frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, tous les coefficients du développement analytique de z par rapport à s .

L'application de cette méthode au cas de la représentation conforme de la sphère sur le plan (projection de Mercator) est faite au Chapitre IV ci-après, à propos de l'application de la méthode b) : c'est le cas où la ligne géodésique du plan U , dont on cherche l'image sur le plan z , se trouve être aussi une ligne géodésique de la surface courbe elle-même.

Dans ce cas, la quantité m est l'échelle surface gauche / plan z , qui est supposée connue et donnée a priori. Les difficultés de calcul dans le problème sont alors réduites au minimum.

Mais pour être appliqué au présent problème du passage d'une représentation conforme plane à une autre, le procédé exige la connaissance de l'échelle relative, plus précisément, du gradient d'échelle relative des 2 projections, en fonction des coordonnées rectangulaires de l'une d'entre elles : cette donnée n'est pas directement fournie dans la pratique, d'où il résultera une certaine cause de complication supplémentaire dans le calcul.

En effet, avec les tables usuelles, on peut connaître en un point P les échelles m' et m'' (ou leurs logarithmes) de chaque plan de projection par rapport à la surface gauche, en fonction des paramètres suivants :

soit de coordonnées curvilignes particulières de la surface gauche (les coordonnées géographiques λ et ϕ par exemple)

soit des coordonnées rectangulaires de l'une et l'autre projection, donc

$$(14) \quad m' = m'(x, y) \quad m'' = m''(X, Y)$$

respectivement.

Or, on a besoin ici de connaître l'expression des dérivées successives de $\log m = \log m' - \log m''$ en fonction d'un seul groupe de coordonnées cartésiennes $[(x, y) \text{ pour le passage } U \rightarrow z, \text{ et vice versa}]$ et par conséquent de transformer les expressions provenant de l'une des projections.

Procédons de proche en proche, en rappelant d'abord que la variable s dans le système différentiel est ici la coordonnée X du plan U . On suppose connues au départ, au point P , les valeurs des coordonnées respectives x, y, X, Y dans les 2 projections, ainsi que l'échelle relative m et l'inclinaison relative θ de l'une par rapport à l'autre. Ces données s'écrivent donc

$$z_0(U_0) \text{ et } \left(\frac{dz}{ds} \right)_0 = (m; \theta)$$

..... (en représentation polaire du nombre complexe)

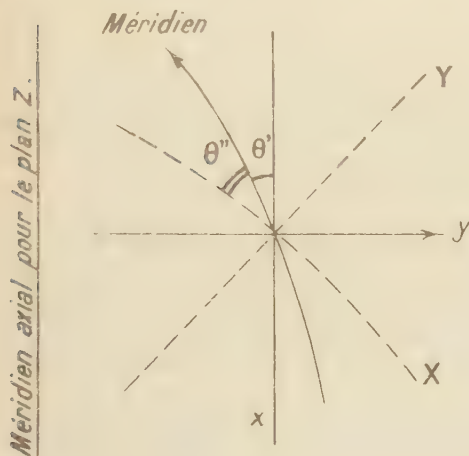
On pourra écrire d'abord :

$$(15) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial \log m'}{\partial x} - \frac{\partial \log m''}{\partial x} - i \left(\frac{\partial \log m'}{\partial y} - \frac{\partial \log m''}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial \log m'}{\partial x} - \left[\frac{\partial \log m''}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \log m''}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right] - i \left\{ \frac{\partial \log m'}{\partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial \log m''}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \log m''}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \right] \right\} \end{aligned}$$

où l'on utilise les données connues dans chaque projection : m' (x y), m'' (X Y); et où l'on fait intervenir également la connaissance a priori de $\frac{dU}{dz}$. En outre, les quantités telles que $\frac{\delta \log m}{\delta x}$ sont données dans les tables des projections géodésiques classiques, étant nécessaire au tracé sur ces projections des images de lignes géodésiques de la surface.

On dispose ainsi de tous les éléments voulus pour calculer $\frac{d^2 z}{dX^2}$ par l'équation fondamentale, ce qui, au point de vue pratique, fournit le coefficient du 2ème degré dans la formule de transformation $z(U)$, centrée au point P, formule dont on connaît les deux premiers termes.

Par exemple, dans une projection Mercator Transverse de la sphère, exemple étudié ci-après au Chapitre IV, où l'on prendrait l'axe des x dirigé suivant le méridien central, si l'on envisage le problème du passage direct d'un fuseau à un autre en un point du méridien moyen (situé à égale distance des 2 projections), on a :



$$\log m' = \log m'' \quad \text{donc } m = 1$$

$$\theta = \theta' - \theta'' = 2c \quad (\text{convergence relative des 2 carroyages, égale au double de la convergence méridienne de chacune})$$

$$\theta = \text{tg } \varphi_0 \quad y - \frac{\text{tg } \varphi_0}{3} (1 + \text{tg}^2 \varphi_0) y^3 \quad \theta'' = \theta'$$

$$\frac{\delta x}{\delta X} = \cos \theta \quad \frac{\delta y}{\delta Y} = \sin \theta \quad \frac{\delta X}{\delta x} = \cos \theta \quad \frac{\delta Y}{\delta x} = \sin \theta$$

$$\frac{\delta x}{\delta Y} = \sin \theta \quad \frac{\delta y}{\delta Y} = \cos \theta \quad \frac{\delta X}{\delta y} = \sin \theta \quad \frac{\delta Y}{\delta y} = \cos \theta$$

$$\frac{\delta \log m'}{\delta x} = 0 \quad \frac{\delta \log m''}{\delta y} = \frac{1}{R^2} y - \frac{1}{3R^4} y^3$$

$$\frac{\delta \log m'}{\delta X} = 0 \quad \frac{\delta \log m''}{\delta Y} = \frac{1}{R^2} Y - \frac{1}{3R^4} Y^3$$

expressions que l'on substituera dans la formule (15).

Pour poursuivre l'application de cette méthode de calcul aux termes ultérieurs $\frac{d^3 x}{dX^3}$, on aura besoin d'exécuter de même des changements de variable, de la forme :

$$\left(\frac{\delta^2 m'}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 m'}{\delta x \delta y}, \frac{\delta^2 m'}{\delta y^2} \right) \equiv f \left[\left(\frac{\delta^2 m''}{\delta X^2}, \frac{\delta^2 m''}{\delta X \delta Y}, \frac{\delta^2 m''}{\delta Y^2} \right) \left(\frac{\delta^2 X}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 Y}{\delta y^2} \text{ etc } \dots \right) \right]$$

où l'on pourra utiliser les valeurs de $\frac{\delta x^2}{\delta X^2}$ etc... précédemment calculées.

En définitive, on constate qu'on se heurte à de grandes difficultés de calcul si l'on veut, par une telle méthode, déduire tous les coefficients successifs du développement analytique représentant le passage direct d'un plan z à un plan U au voisinage d'un point quelconque.

En revanche, le problème est beaucoup simplifié si l'une des échelles (par exemple $\log m''$) est stationnaire au voisinage du point considéré, c'est-à-dire si la ligne centrale de l'une des projections (la projection U) passe par ce point : on se trouve alors dans les conditions du cas b) étudié ci-dessus. Le problème se réduit au problème du tracé d'une ligne géodésique dans la projection z , qui est lui-même facile à traiter au moyen des éléments numériques et des formules données dans les tables.

On se trouve ainsi conduit à recourir à la méthode de la projection intermédiaire, définie au c) ci-dessus : pour calculer les coefficients du passage direct autour du point P, on pourra faire emploi de formules de composition de développement en série, qui sont simples, et l'on constate que le procédé est en définitive plus avantageux que les délicates dérivations étagées de $(\log m' - \log m'')_{(x,y)}$ envisagées ci-dessus.

D'ailleurs, l'introduction d'une projection intermédiaire particulière, pour laquelle les coefficients du passage aux deux projections sont faciles à calculer, est encore à recommander, même pour le cas où l'on se borne à rechercher les termes du 2ème degré de la formule de passage, les formules de composition des développements étant extrêmement simples pour le 2ème degré : le calcul présenté de cette manière est sans doute plus rapide et plus sûr que l'addition vectorielle des $\text{grad } \log m'$ et $\text{grad } \log m''$ mentionnée ci-dessus.

Cette discussion aboutit ainsi à la conclusion que l'étude du problème des changements de projection peut avantageusement être limitée au cas de positions particulières du centre de formule par rapport à la figure, cas particuliers auxquels il est toujours possible de réduire le cas général en recourant à l'intermédiaire d'une projection auxiliaire choisie à cet effet.

Ce sont ces traitements, dans des positions particulières des centres de formules, qui font l'objet des développements du Chapitre IV ci-après.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DES PRINCIPAUX CAS D'APPLICATION FORMULES PARTICULIÈRES ET DISCUSSION NUMÉRIQUE

INTRODUCTION

La recherche des coefficients des développements en série $U(z)$ exprimant la représentation conforme d'un plan de projection sur un autre est effectuée ci-dessous pour les passages entre projections suivantes :

projection de Mercator - projection conique conforme dite de LAMBERT

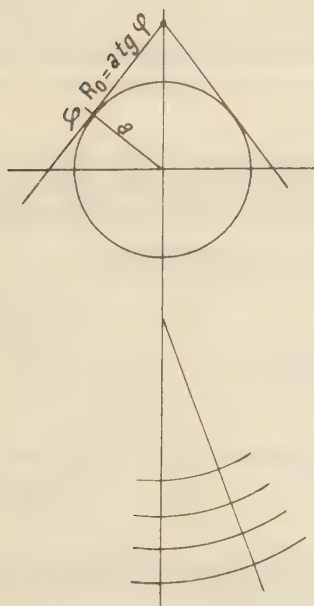
projection de Mercator Transverse dite de GAUSS - projection Mercator oblique dite "décuménale"

au moyen des méthodes décrites au Chapitre III. Tenant compte des remarques faites, on effectue le calcul pour des centres de formules particuliers, qui permettent de tirer parti immédiatement des données classiques acquises sur les dites projections (centres situés sur l'une des lignes de base, voire à leur intersection). De là, on obtient l'évaluation numérique de l'ordre de grandeur des termes des 3ème, 4ème et 5ème degré et des restes correspondants (reste de la série), en vue de l'application des formules d'interpolation étudiées aux Chapitres I et II. La petitesse de ces termes justifie l'emploi de ces méthodes d'interpolation dans des grilles et des mailles étendues (relativement au champ usuel des projections géodésiques).

Comme corollaire, la petitesse des termes d'ordre supérieur à trois (3) dans le développement en série particulier $U(z)$ (centre P) permet d'inférer l'allure des coefficients du développement. Si la distance PP' est de l'ordre de 200 ou 300 km, pour un autre centre.... $U(z)$ (centre P'), les propriétés qualitatives ne sont pas modifiées; une limitation de degré (à 2, 3 ou 4), qui convient pour obtenir une précision donnée dans un champ donné autour de P, reste valable autour du centre P' avec le même résultat.

Dans l'étude du passage d'une projection de Mercator Transverse à une autre, on effectue à titre de lemme un traitement approfondi du tracé des lignes géodésiques sur la projection de Mercator, au moyen des équations différentielles de la géodésique. On avait vu au Chapitre III que cette méthode est générale et valable pour fournir la solution complète du problème du changement de projection $U(z)$ à centre quelconque. Mais la complication de calcul rencontrée, même dans le cas particulièrement simple qui est ici abordé, justifie pour les autres cas le choix de la méthode indirecte décrite ci-dessus, et qui est utilisée tout au long du Chapitre.

I. PASSAGE ENTRE PROJECTION CONIQUE ET PROJECTION DE MERCATOR



Soit U le Plan MERCATOR, z celui de la projection conique, $n = \sin L$ l'exposant de celle-ci (voir page 62 ci-dessus).

Prenant l'axe réel de l'un et l'autre plan, confondu avec le méridien central de la zone à transformer, on a la formule de passage générale

$$U = 1/n \cdot \log z$$

où les unités ne sont pas précisées pour l'instant.

Pour obtenir la formule de passage centrée au point M_0 où le rayon du parallèle, en projection, est R, on écrira :

$$(1) \quad U = U_0 + \Delta U = U_0 + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{\Delta z}{z_0} \right) = U_0 + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{\Delta z}{R} \right)$$

puisque M_0 est, d'après ce qui a été dit ci-dessus, sur l'axe réel.

Posant $x = \frac{\Delta z}{R}$, la formule se développe à l'aide du développement de logarithme :

$$\log(1+x) = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

dont le rayon de convergence est l'unité (1).

(1) Il est, pour la pratique, utile de remarquer que la forme du développement en série est la même en une position quelconque des plans LAMBERT intéressés; la discussion numérique n'ayant donc à prendre en considération que le rapport $\frac{\Delta z}{R_0}$ (R... au point central de la formule).

Dans la pratique, où il s'agit d'évaluer l'erreur produite en limitant le développement à un terme donné, le calcul numérique est immédiat en utilisant les expressions précédentes.

Pour un exemple numérique, prenons $R_0 = 10,000 \text{ km}$ (projection conique conforme à la latitude moyenne 37° n $\neq 0,6$) $\Delta z = 100 \text{ km}$ $\Delta z/R = 0,01 = 10^{-2}$.

Le calcul numérique montre le terme du 4ème ordre égal à

$$\frac{1}{0,6} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-8}$$

qui équivaut, dans une table à double entrée donnant les coordonnées de MERCATOR en fonction des coordonnées de LAMBERT, à pour calculer, par exemple, la longitude au centre d'un carré d'une demi-diagonale de 100 km (carré de 1000 degrés) avec une précision de $\frac{1}{0,6} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-8}$ qui correspond sensiblement à

(2) $1/400$ de seconde centésimale (équivalent à 2 cm environ).

Les formules du 2ème degré ou du 4ème degré laissent, dans les mêmes conditions, des erreurs environ 100 fois plus grandes ou plus petites respectivement (si on assimile à un les facteurs numériques 3/4 et 4/5).

Pour généraliser le résultat ci-dessus, on prendra le radian comme unité de longueur sur l'axe des z ; alors $R_0 = \cotg \varphi$

La formule s'écrit :

$$(3) \quad U_0 + \Delta U = 1/\sin \varphi_0 \cdot \log(\cotg \varphi_0 + \Delta z) = \Delta U = \frac{1}{\sin \varphi} \left(t \Delta z + \frac{t^2}{2} \Delta z^2 + \dots + \frac{t^p}{p} \Delta z^p + \dots \right)$$

d'où l'on obtient les coefficients successifs du développement

$$(t, \text{ du 4ème ordre : } 1/4 \frac{1}{\sin \varphi} \text{tg}^4 \varphi ; t, \text{ du 5ème ordre : } 1/5 \frac{1}{\sin \varphi} \text{tg}^5 \varphi)$$

Ces résultats seront utilisés ci-après par comparaison avec ceux relatifs à la projection de MERCATOR TRANSVERSE : il est en effet intéressant de confronter les propriétés pratiques des deux principales projections de la Géodésie, en ce qui concerne le passage aux coordonnées de MERCATOR (—d'où dérivent les coordonnées géographiques latitude et longitude).

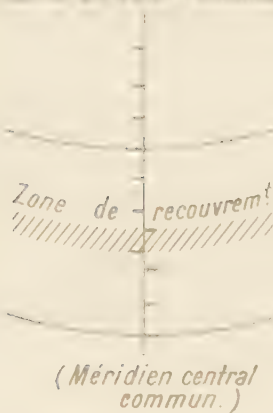
II. PASSAGE ENTRE DEUX PROJECTIONS CONIQUES CONFORMES

Nous supposons maintenant à la disposition de la figure ci-jointe, qui est faite dans la même hypothèse que ci-dessus (axe réel = méridien central de la zone à transformer).

U et z représentent ici les variables complexes de deux projections d'exposant n et n' ($n = \sin L_0$, $n' = \sin L_0'$); en formant l'expression de U en fonction de z on reconnaît la transformation

$$(4) \quad U = U_0 \left(\frac{R_0 + \Delta z}{R_0} \right)^{\frac{n}{n'}} = U_0 \left(1 + \frac{\Delta z}{R_0} \right)^{1+\alpha}$$

Zones LAMBERT voisines



où U_0 et R_0 sont les rayons dans les plans U et z , et où α est la différence relative des exposants $\frac{\sin L_0' - \sin L_0}{\sin L_0}$; α est positif quand le plan z correspond à la zone la plus voisine de l'équateur (*).

L'étude numérique de la convergence du développement découle immédiatement de celle faite ci-dessus pour la série du logarithme, en comparant chacun à chacun les coefficients de la série du binôme à ceux de la série du logarithme.

	Série du binôme	Série du log
		$\frac{1}{1}$
on pose $n(n-1) = \epsilon$	$\frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \neq \epsilon \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \neq \epsilon \frac{1}{2} \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{4} \neq \epsilon \frac{1}{3} \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(*) Il est, pour la pratique, utile de remarquer (comme ci-dessus) que la forme du développement en série est la même en une position quelconque des plans LAMBERT adjacents; la discussion numérique n'ayant donc à prendre en considération que le rapport $\frac{\Delta z}{R_0}$ (R_0 au point central de la formule).

Le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ entre deux coefficients consécutifs, qui définit les conditions d'utilisation pratique du développement, est celui de la série logarithmique, multiplié par des facteurs très voisins de $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

La décroissance des coefficients initiaux est donc plus rapide que dans la série du logarithme, mais tend à lui devenir égale pour les rangs élevés, puisque le rayon de convergence est le même dans les deux cas, comme l'a prouvé ABEL.

Exemple numérique pour une transformation directe de projections coniques, distantes de 3° ($= 300$ km) entre les parallèles moyens, Latitude 45° environ (Ex. de la transformation LAMBERT I $\rightarrow$ LAMBERT II français)

Ordre	1	2	3	4	5	6
Coefficient	0,96	0,020	0,007	0,0035	0,002	0,0014

$R = a \cotg \varphi_0$ est de l'ordre de 6.000 km environ.

Pour un $\Delta z = 100$ km, $\frac{\Delta z}{R_0} \sim \frac{1}{60}$,

(5) la valeur du terme du 4ème ordre est de 2 mm (reste de la formule du 3° degré).

Les termes du 3ème et du 5ème ordre sont dans les rapports respectifs :

(6)

3ème ordre	$60 \cdot 2 = 120$
5ème ordre	$\frac{1}{60} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{100}$

ce qui détermine les conditions d'emploi des formules du 2ème degré et la méthode d'établissement de la grille de base.

Récrivant l'expression du terme du 4ème ordre, noté U_4 , pour un cas général de passage de zone à zone, les parallèles centraux étant proches l'un de l'autre ($n = 1 \pm \varepsilon$), à une latitude moyenne φ_m , en prenant le radian comme unité pour Δz

(7)
$$U_4 = \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0}{\sin \varphi_1} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\text{tg}^3 \varphi} \Delta z^4$$

formule d'où l'on peut déduire la valeur numérique pour le cas quelconque, en partant de celle ci-dessus calculée.

III. PASSAGE ENTRE UNE PROJECTION DE MERCATOR TRANSVERSE ET UNE PROJECTION CONIQUE CONFORME

On applique la même méthode générale que précédemment, en se servant de l'expression du X du plan U (LAMBERT) en fonction du x du plan z (MERCATOR TRANSVERSE) qui, par définition, est égal à l'élément d'arc méridien sphérique (ou sphéroïdique) correspondant.

Les formules donnant la solution de cette question, selon

$$\Delta X = \Delta x + \frac{1}{3!} C \Delta x^3 + \frac{1}{4!} \Gamma_c \cdot C \cdot \Delta x^4 + \dots$$

(où C désigne la courbure totale du sphéroïde au point central de la formule), sont obtenues par M. ALLARD dans sa thèse, en expliquant notamment l'intervention du terme Γ_c , courbure géodésique de la ligne de base (qui est le parallèle de latitude φ_0).

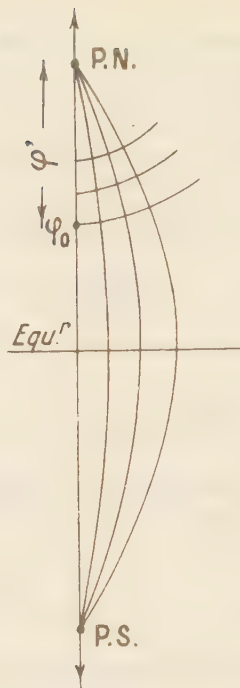
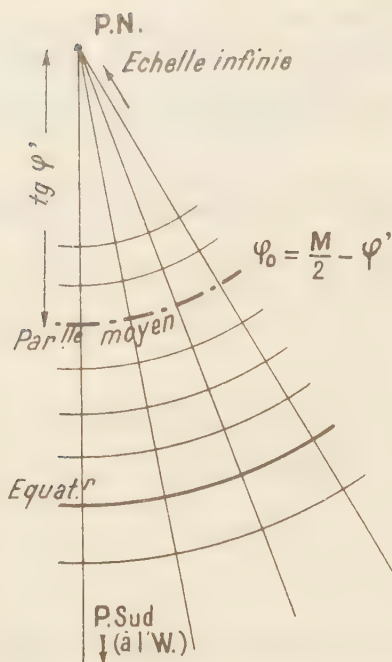
Pour le cas de la sphère, on obtient sans difficulté (*) les termes suivants du développement qui sont (en prenant le radian comme unité)

(8)
$$\Delta X = \Delta x + \frac{1}{3!} \Delta x^3 + \frac{1}{4!} t \Delta x^4 + \frac{1}{5!} (5 + 3 t^2) \Delta x^5 + \frac{1}{6!} t (21 + 12 t^2) \Delta x^6 + \dots$$

(où t est la $\text{tg} \varphi$). On reconnaît les premiers termes d'ALLARD. On note d'autre part que tous les coefficients sont positifs.

(*) En intégrant l'équation différentielle de la projection LAMBERT

$$\frac{d^2 R}{d S^2} = \frac{dR}{dS} \frac{\sin \varphi - \sin \varphi_0}{r} \quad (r = \text{rayon du parallèle de lat. } \varphi)$$



Les propriétés élémentaires classiques de la projection de LAMBERT font savoir que les pôles Nord et Sud sont points critiques. Pour une projection LAMBERT de latitude moyenne Nord, le pôle Nord est point critique pour lequel la fonction $U(z)$ est finie, mais prend une dérivée infinie; l'image du pôle Sud, au contraire, est à l'infini. Considéré dans le plan z de la variable Mercator Transverse, c'est donc l'image du pôle Nord qui est le point critique le plus proche, à la distance

$$\varphi' = \pi / 2 - \varphi_0$$

définissant le rayon de convergence de la série $X(x)$; les autres points critiques sont toutes les images des pôles, dans la projection Mercator Transverse, disposés en nombre infini et à intervalle régulier de π sur l'axe des x (plan z).

TRANSFORMATION INVERSE : PASSAGE DE PROJECTION CONIQUE CONFORME A PROJECTION DE MERCATOR TRANSVERSE

On obtient le développement par inversion du précédent. Voici son expression (dans l'hypothèse sphérique)

$$(9) \quad \Delta x = \Delta X - \frac{1}{3!} \Delta X^3 - \frac{1}{4!} t \Delta X^4 + \frac{1}{5!} (5 - 3t^2) \Delta X^5 + \frac{1}{6!} t (14 - 12t^2) \Delta X^6 + \dots$$

Le rayon de convergence est évidemment R_0 , distance à l'image du pôle Nord dans le plan LAMBERT (où la dérivée dx/dX présente une discontinuité). On constate que les coefficients de ce deuxième développement sont, en général, majorés par ceux du précédent, à cause d'introduction de signes moins venant de l'inversion. Seuls, les coefficients du 3ème et 4ème degré ont valeurs numériques communes; pour le coefficient du 5ème degré, le rapport numérique est de un à quatre à la latitude moyenne.

La propriété de majoration se maintient pour les termes lointains, où elle se relie au fait que ...

... le rayon de convergence de la première des séries est $\varphi' = \pi / 2 - \varphi_0$

... celui de la 2ème est $R_0 = tg \varphi'_i$ avec $tg \varphi' > \varphi'$

Cette remarque nous permet de concentrer l'étude pratique, numérique, sur le premier passage (de Mercator Transverse à Conique Conforme). Les champs d'action obtenus pour les divers algorithmes d'interpolation (si l'on fixe la précision à atteindre) dans cette première opération, sont, a fortiori, valables pour l'opération inverse.

Il n'y a pas, pour la pratique, d'intérêt à dissocier les deux problèmes, étant donné que dans les problèmes de transformation en série de coordonnées rectangulaires, on maintient une symétrie complète entre le passage "aller" et le passage "retour", indispensable pour la vérification.

ETUDE NUMERIQUE DU DEVELOPPEMENT (MERCATOR TRANSVERSE → LAMBERT)

Le terme $\frac{1}{24} t \Delta X^4$ donne le résidu de l'algorithme de bipartition de maille, instrument essentiel de l'établissement et de la vérification des tables numériques.

Prenant encore $|\Delta X|$ (ou $|\Delta x|$) égal à 100 km ($\approx 1,57 \cdot 10^{-2}$ radian) à la latitude moyenne $t = tg 45^\circ = 1$ on trouve

$$(10) \quad U_4 = 1,6 \text{ cm.}$$

La valeur du terme du 5ème ordre nous intéresse aussi, puisqu'elle définit la précision de l'interpolation à cinq points dont nous faisons emploi pour la construction des points périphériques des grilles.

Considérons la valeur relative des coefficients successifs :

Rapport du 5ème au 4ème
1,6

$6^\circ/5^\circ$
0,7

limite
→ (1,27)

$1/\frac{\pi}{4}$

On voit qu'à partir du terme U_5 , la série est majorée par la série géométrique du rayon de convergence. On peut donc écrire :

$$R_5 < U_5 \frac{1}{1 - \frac{\Delta x}{R}}$$

D'après ce qui a été dit ci-dessus, puisque pour $\Delta Z = 100$ km, $U_4 = 16$ mm, avec

$$(11) \quad \frac{\Delta x}{R} \sim \frac{1}{60}, \quad U_5 = U_4 \cdot 1,6 \cdot \frac{1}{60} \neq 0 \text{ mm}, 4$$

l'interpolation Lagrangienne à 5 points sur un milieu de côté est, pour un carré de 200 km de côté, d'après la formule (18) du Chapitre II

$$5 \cdot U_5 = 2 \text{ mm}$$

Si le carré a une dimension double, ce qui correspond à un champ égal au maximum de ceux rencontrés en Géodésie, le résultat précédent doit être multiplié par $2^5 = 32$. On trouve 6 cm, erreur négligeable pour tous les besoins habituels.

IV. PASSAGE DE LA PROJECTION DE MERCATOR TRANSVERSE A LA PROJECTION DE MERCATOR

Ce problème pourrait être considéré comme un cas particulier du précédent. Il s'agit en effet d'un problème de passage d'une projection Mercator transverse à une projection conique particulière. Il y a toutefois, cette particularité supplémentaire, que la formule de passage est recherchée pour un centre situé à une distance importante de la ligne de base de la projection conique considérée, distance qui est du même ordre de grandeur que la distance au point critique.

Les propriétés de la formule générale de passage pour les projections coniques, prise ici avec $\varphi = 0$ d'où $\text{tg } \varphi = t = 0$

$$(12) \quad \Delta X = \Delta x + \frac{1}{3!} \Delta x^3 + \frac{1}{4!} \Delta x^5 + \frac{61}{7!} \Delta x^7 + \dots$$

ne peuvent être discutées utilement ici pour un Δx aussi grand.

Il faut rétablir les coefficients particuliers du développement pour une latitude arbitraire.

Le développement est classique, il s'appuie sur la relation (cas sphérique)

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (\varphi = x)$$

et le développement de $\frac{1}{\cos \varphi}$ en série. On a ainsi (*)

$$(13) \quad \Delta X = \frac{1}{\cos \varphi} \left\{ \Delta x + t \frac{\Delta x^2}{2!} + (1 + 2t^2) \frac{\Delta x^3}{3!} + t(5 + 6t^2) \frac{\Delta x^4}{4!} + \right. \\ \left. + (5 + 28t^2 + 24t^4) \frac{\Delta x^5}{5!} + t(61 + 180t^2 + 120t^4) \frac{\Delta x^6}{6!} + \right. \\ \left. + (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6) \frac{\Delta x^7}{7!} + \right. \\ \left. + t(1385 + 7266t^2 + 10920t^4 + 5040t^6) \frac{\Delta x^8}{8!} \dots \right\}$$

Ce développement en série a pour rayon de convergence la distance $\frac{\pi}{2} - \varphi = \varphi'$ au pôle le plus proche, comme on a vu précédemment pour le passage Mercator Transverse — conique conforme. D'autre part, on constate comme précédemment que le rapport d'un coefficient au suivant tend vers φ' par valeurs inférieures, de sorte que la série est effectivement majorée, pour tous ses termes, par la série géométrique de son rayon de convergence : on en déduit donc sans difficulté le reste pour un degré donné.

EXEMPLE POUR LE PASSAGE DE MERCATOR TRANSVERSE A MERCATOR, A LA LATITUDE MOYENNE ($\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$)

Rayon de convergence théorique

$$\frac{\pi}{4} = 0,7854 \quad \frac{4}{\pi} = 1,27324 \quad (\text{rapport coefficients successifs})$$

(*) Réf. HRISTOW Zf V. 1938 p. 600

Développement

	2° degré	3°	4°	5°	6°	7°	8°
(Coefficients)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{57}{120}$	$\frac{361}{720}$	etc...	
(Rapport de coeff. successifs)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{57}{55}$	$\frac{361}{342}$	$\frac{2763}{2527}$	$\frac{24611}{22104}$
(d°)	0,5	0,5	0,916	1,036	1,055	1,093	1,113

Pour fixer les ordres de grandeur numériques, on peut noter, à la latitude de 45°, l'appoint du terme de 4ème degré pour $|\Delta z| = 100 \text{ km}$ est environ 0"01,

$$(14) \quad U_4 = 0"01$$

les termes précédent et suivant étant environ 50 fois plus grands, et plus petits, respectivement

$$(15) \quad \frac{U_3}{U_4} = \frac{U_4}{U_5} = \frac{50}{1}$$

Rappelons que la formule ci-dessus est centrée sur le Méridien Central de la projection Mercator Transverse; des formules "décentrées" interviendront par la suite à propos du passage de fuseau à fuseau.

Remarques sur la comparaison des propriétés des développements ci-dessus, à celles du développement précédent, exprimant le passage à Mercator d'une projection conique conforme, pour la même latitude moyenne (notations : développement N° (13), développement N° (3), respectivement)

I - Comparant chacun à chacun les coefficients écrits ci-dessus, à ceux trouvés plus haut pour la projection conique de LAMBERT, on constate l'égalité des termes de plus haut degré en t dans chaque développement, les coefficients pour le développement N° (13) comportant en outre des termes additifs toujours positifs. Il majore donc nécessairement le développement N° (3); le rapport des coefficients de même rang est sensiblement celui des rayons de convergence, comme le montre la suite ci-dessous, calculée pour la latitude moyenne 45°

	1er degré	2e	3e	4e	5e	6e
Rapport des coefficients homologues						
(Merc ^r Transverse)	1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{57}{24}$	$\frac{361}{120}$
(Lambert)	1	1	1,5	1,83	2,37	3,01
rapport successif comparable à $\frac{\rho_i}{\rho_{ii}}$	1	1,5	1,23	1,3	1,25	
On a $\frac{\rho_i}{\rho_{ii}} = \frac{\text{tg } \varphi'}{\varphi'}$ à 45°	$\frac{1}{\frac{\pi}{4}} \neq 1,27$					

II - Le développement N° 13 peut être obtenu en deux temps, en utilisant comme intermédiaire le système LAMBERT de même latitude moyenne : appelant u cette variable intermédiaire, on écrit le développement $X(u)$ qui est le développement N° 3, puis on substitue sous u l'expression en fonction de x , utilisant le développement (LAMBERT en fonction de Mercator Transverse) vu précédemment, et que nous appellerons développement 8.

On retrouve aisément les coefficients du développement N° 13, en utilisant la table de composition ci-dessous :

Si l'on pose	$a_1, a_2, \dots$	les coefficients du développement	$u(x)$
	$b_1, b_2, \dots$	ceux de	$X(u)$
	$c_1, c_2, \dots$	les coefficients de	$X(x)$

on a :

$$(16) \quad \begin{aligned} c_1 &= b_1 a_1 \\ c_2 &= b_2 a_1^2 + b_1 a_2 \\ c_3 &= b_3 a_1^3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_1 a_3 \\ c_4 &= b_4 a_1^4 + 3 b_3 a_1^2 a_2 + b_2 a_2^2 + 2 b_2 a_1 a_3 + b_1 a_4 \\ c_5 &= b_5 a_1^5 + 4 b_4 a_1^3 a_2 + 3 b_3 a_1 a_2^2 + 3 b_3 a_1^2 a_3 + 2 b_2 a_2 a_3 + 2 b_2 a_1 a_4 + b_1 a_5 \end{aligned}$$

Ces formules s'obtiennent à partir des formules du changement de variables $X = u(x)$, écrites pour les dérivées successives. Pour faciliter l'écriture, on utilisera les notations :

$$\begin{aligned} \beta_1 \beta_2 \beta_3 &= \dot{X} \ddot{X} \ddot{\ddot{X}} \text{ etc } \dots \equiv \text{dérivées successives de } X \text{ par rapport à } u \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 &= u' u'' u''' \text{ etc } \dots \equiv -d^0 \text{ de } u \text{ par rapport à } x \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 &= X' X'' X''' \text{ etc } \dots \equiv -d^0 \text{ de } X \text{ par rapport à } x \end{aligned}$$

(16 bis) $\gamma_1 = X' = \dot{X} \cdot u'$

$$\gamma_2 = X'' = \ddot{X} \cdot u'^2 + \dot{X} \cdot u'' =$$

$$\gamma_3 = X''' = \ddot{\ddot{X}} \cdot u'^3 + 3 \ddot{X} u' u'' + \dot{X} \cdot u''' =$$

$$\gamma_4 = X^{IV} = \ddot{\ddot{\ddot{X}}} \cdot u'^4 + 6 \ddot{\ddot{X}} u'^2 u'' + 3 \ddot{\ddot{X}} u''^2 + 4 \ddot{\ddot{X}} u' u''' + \dot{X} u^{IV} =$$

$$\begin{aligned} &\beta_1 \alpha_1 \\ &\beta_2 \alpha_1^2 + \beta_1 \alpha_2 \\ &\beta_3 \alpha_1^3 + 3 \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3 \\ &\beta_4 \alpha_1^4 + 6 \beta_3 \alpha_1^2 \alpha_2 + 3 \beta_2 \alpha_2^2 + 4 \beta_2 \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \alpha_4 \end{aligned}$$

etc...

qui sont utiles lorsque les dérivées des fonctions X et u ont une forme simple. En introduisant les $\frac{1}{2!} \dots \frac{1}{n!}$ on obtient les formules entre les coefficients des développements en série.

Application : Développement (13) = Dévt (3) Dévt (8)

(Dévt 3) Mr du LAMBERT

$$\Delta X = \frac{1}{\cos \varphi} \left[\Delta u + \frac{1}{2} t \Delta u^2 + \frac{1}{3} t^2 \Delta u^3 + \frac{1}{4} t^3 \Delta u^4 \dots \right]$$

(Dévt 8) Lt du Mercator Transverse

$$\Delta u = \Delta x + \frac{1}{6} \Delta x^3 + \frac{1}{24} t \Delta x^4 + \frac{1}{5!} (5 + 3t^2) \Delta x^5$$

D'où

(Dévt 13) Mr du M.T.

$$\begin{aligned} \Delta X = \frac{1}{\cos \varphi} \left[\Delta x + \frac{1}{2} t \Delta x^2 + \frac{1}{3!} (1 + \quad + 2t^2) \Delta x^3 \right. \\ \quad + \frac{1}{4!} (1 + 4 + 6t^2) \Delta x^4 \\ \quad \left. + \frac{1}{5!} (5 + 3t^2 + 5t^2 + 20t^2 + 24t^4) \Delta x^5 \dots \right] \end{aligned}$$

En particulier, on constate par le calcul, la genèse du terme de plus haut degré en t , qui provient nécessairement du développement N° 3. D'où la remarque en I ci-dessus.

La méthode de composition de développement, introduite ici, va jouer un rôle utile dans la suite, pour traiter le problème du passage d'un fuseau de Mercator à un autre.

III - La même comparaison des rayons de convergence peut être tirée de la formule donnant la longitude dans chaque système de projection. La donnée d'une seule des composantes d'une fonction analytique suffit, en effet, à déterminer entièrement celle-ci (relations de Cauchy-Riemann)

Mercator Transverse

$$(3) \quad M = \text{Arc tg } \frac{\text{sh} x}{\sin y}$$

Conique conforme

$$(13) \quad M = \frac{1}{\sin \varphi_0} \text{Arc tg } \frac{x}{y}$$

où l'on a pris cette fois le point origine au pôle Nord dans les deux systèmes.

On constate que lorsque l'on considère des régions de plus en plus voisines du pôle, avec x et y (pour chacune des deux projections) diminuant en valeur absolue, et la projection conique se rapprochant de plus en plus de la projection stéréographique polaire, les deux expressions tendent asymptotiquement l'une vers l'autre, d'où notre conclusion ci-dessus (identité des termes de plus haut degré en t^2 )

Or, le développement (3) (conique) est majoré par le développement (13), cela est facilement visible à cause des fonctions $\text{sh} x$ et $\sin y$ remplaçant x et y chacune à chacune.

TRANSFORMATION INVERSE : OBTENTION DES COORDONNEES DE MERCATOR TRANSVERSE EN FONCTION DES COORDONNEES DE MERCATOR

(Centre de formule sur le méridien central de la projection M.T.)

Pour préciser le langage, nous appellerons cette formule (13 bis), par analogie à la formule inverse (13)

Pour ce cas, appliquant encore la méthode générale déjà employée, on utilise la relation $s(\mathcal{L})$, inverse de la précédente. Posant $\mathcal{L} \rightarrow x$, $s \rightarrow X$, on a les formules explicites

$$X = 2 \left[\text{Arc tg } e^x - \pi / 4 \right]$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{\text{ch } x} \quad (= \cos \varphi)$$

Cette dernière formule est à rapprocher de la précédente $\frac{dx}{dX} = \frac{1}{\cos X}$ d'où étaient déduits les coefficients successifs du développement $\mathcal{L}(s)$. Les calculs faits précédemment à ce sujet restent valables ici, à condition d'échanger les lignes trigonométriques sinus et cosinus avec les fonctions hyperboliques sh et ch, et de tenir compte des changements de signe nécessaires.

Il est commode, pour les calculs numériques, de donner au développement une expression obtenue à partir de la précédente, mais explicitée en fonction des lignes trigonométriques de la latitude, puisque

$$\frac{1}{\text{ch } x} = \cos \varphi \quad \text{th } x = \cos \varphi \quad \text{sh } x = \cos \varphi \quad \text{tg } \varphi = \sin \varphi$$

On a ainsi le tableau des dérivées dans les deux présentations

(13 bis)	1	2	3	4	5
express. en hyp.	$\frac{1}{\text{ch}}$	$-\frac{\text{sh}}{\text{ch}^2 x}$	$-\frac{1}{\text{ch}} + 2 \frac{\text{sh}}{\text{ch}^3}$	$5 \frac{\text{sh}}{\text{ch}^2} - 6 \frac{\text{sh}}{\text{ch}^4}$	$5 \frac{\text{sh}}{\text{ch}} - \frac{28 \text{sh}}{\text{ch}^3} + \frac{24 \text{sh}}{\text{ch}^5}$
express. en trig.	$\cos \varphi$	$-\cos^2 \varphi \text{ t}$	$\cos^3 \varphi (-1 + t^2)$	$\cos^4 \varphi \text{ t} (+5 - t^2)$	$\cos^5 \varphi (+5 - 18 t^2 + t^4)$

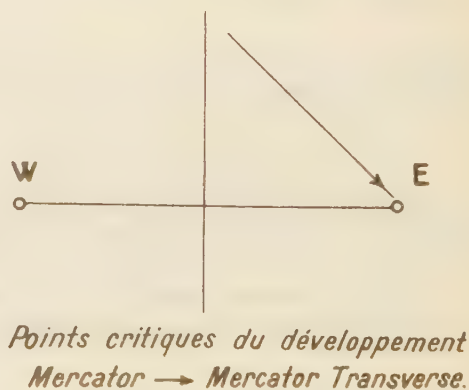
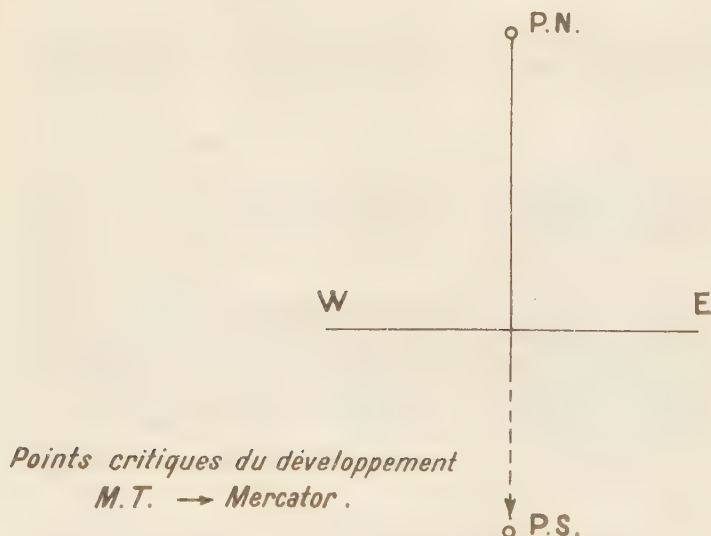
On trouve (comme plus haut au sujet du passage de M.T. en LAMBERT et vice versa) que ce développement est majoré par le développement inverse; son résidu (reste de la série), pour un champ donné, et un ordre donné, est donc inférieur à celui donné par le développement (13).

L'étude numérique d'une transformation réciproque des coordonnées rectangulaires M.T. aux coordonnées Mercator, est donc déterminée par les propriétés d'interpolation du développement N° 13 précédent.

Le rayon de convergence est en évidence sur la figure ci-contre, les points critiques sont les pôles de la projection Mercator Transverse, situés sur l'Equateur à $\pm 90^\circ$ du méridien central.

CARACTERE RÉCIPROQUE DES DEUX FORMULES CI-DESSUS (MT $\rightleftharpoons$ MERCATOR) CONSÉQUENCE

De la réciprocité du caractère "Transverse", il résulte que la formule de passage MT $\rightarrow$ Mercator, dont les coefficients constituent le développement N° (13) ci-dessus, et qui est issue de la relation $\mathcal{L}(s)$, se transforme en la formule inverse, lorsque le centre de formule vient sur l'équateur (avec échange simultané des rôles de $\mathcal{L}$ et λ) ... formule dérivant de la relation $s(\mathcal{L})$ et dont les coefficients constituent le développement (13 bis) ci-dessus.



Ainsi, les coefficients des formules locales issues de (13) et (13 bis) pour un centre quelconque, éprouvent des modifications rapides lorsque le centre varie dans le champ; ceci nous prépare au traitement du problème des passages mutuels de fuseaux M.T., où ce phénomène de variation joue un rôle essentiel.

V. PASSAGE ENTRE DEUX PROJECTIONS DE MERCATOR TRANSVERSE FUSEAUX ADJACENTS

INTRODUCTION

Ce problème est important pour la pratique, étant donné l'emploi généralisé de cette projection dans la Géodésie actuelle.

On le traitera ici dans l'hypothèse sphérique, nous appuyant sur une remarque déjà faite au sujet de la proximité de l'ellipsoïde terrestre par rapport à sa sphère de courbure moyenne.

Après une étude sommaire de la transformation au point de vue des points critiques, on mettra en œuvre successivement diverses méthodes pour construire le développement analytique représentatif :

- Calcul des formules à centre à l'équateur par la méthode générale N° 1.
- Pour un centre à latitude quelconque : emploi de la méthode générale N° 3, transformation intermédiaire en MERCATOR, et usage des formules de composition.
- Centre à latitude quelconque : recours aux formules explicites déduites de la trigonométrie sphérique.
- Assimilation du problème au problème général du tracé d'une ligne géodésique sur une projection.

Entre les diverses méthodes ci-dessus, il existe des analogies qui font que l'on passe naturellement de l'une à l'autre, mais, en pratique, elles se distinguent chacune par un avantage particulier, par rapport à une des difficultés du problème; elles présentent le résultat sous des formes différentes, pour l'application numérique.

L'exposé effectué de ces divers points de vue successifs met en évidence le rôle important joué par un même problème dans plusieurs questions classiques de la Géométrie appliquée.

V. 1 — NATURE DE LA TRANSFORMATION : ÉTUDE DIRECTE DES POINTS CRITIQUES.

Soit à passer des coordonnées d'un fuseau (f) à celles d'un fuseau voisin (F), décalé de $-\lambda_0$ en longitude. Les points critiques de la transformation sont les images dans le fuseau MT (f) des pôles du fuseau MT (F) : quand z est en l'un de ces points, le transformé U va à l'infini. La figure ci-contre montre la disposition de ces points critiques. Ils sont en nombre infini, disposés alternativement par rapport à l'axe central.

La distance CI de la figure est égale à $\mathcal{L}(\pi/2 - \lambda_0)$, la distance ωI , à $\mathcal{L}(\lambda_0)$. Pour une formule centrée au point b, avec les ordres de grandeur de λ_0 usuels en Géodésie, le point C_1 est le point critique le plus proche, le rayon de convergence est par conséquence

$$\rho = \mathcal{L}(\pi/2 - \lambda_0) + \mathcal{L}(\lambda_0) \quad (1)$$

Il est important de noter que l'Equateur (ou plutôt les images successives de l'Equateur) sont des lignes droites globalement conservées dans la transformation permettant la mise en œuvre de la méthode générale N° 1, et que ce sont les seules.

Nous commençons le traitement du problème par cette méthode, c'est-à-dire que le centre de formule est supposé à l'Equateur; on suppose même que le centre de formule se trouve sur le méridien central du fuseau (f), position la plus favorable pour l'étude : appellation dans la figure et le texte ci-après.

V. 2 — ÉTUDE DE LA FORMULE DE PASSAGE A L'ÉQUATEUR.

Dans chaque fuseau (f) et (F), l'équateur, décrit par le paramètre (longitude positive vers l'ouest) est représenté par les relations

dans (f), méridien central $\lambda = 0$

$$x = 0 \quad y = \mathcal{L}(\lambda) \quad (1)$$

dans (F), méridien central $(-\lambda_0)$

$$X = 0 \quad Y = \mathcal{L}(\lambda + \lambda_0) \quad (2)$$

La formule cherchée, $X(x)$, s'obtient par élimination de λ entre les deux équations; on a ici besoin de la relation (1'), inverse de (1)

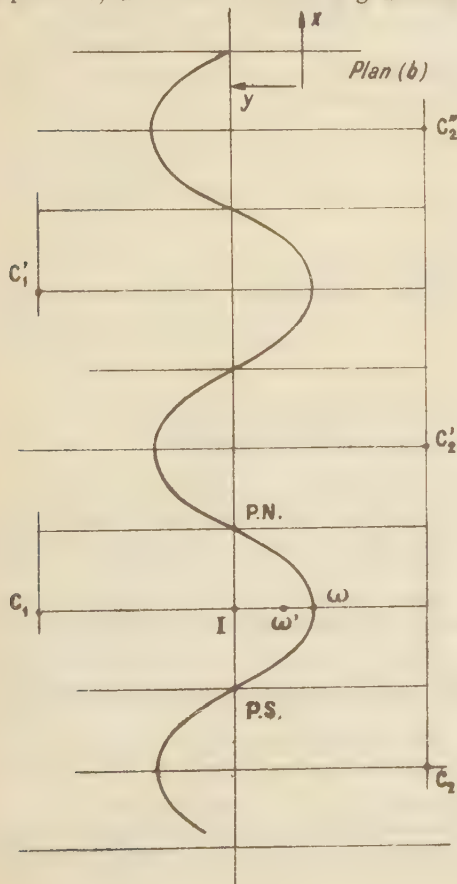
$$(1') \quad \lambda = \mathcal{L}^{(-1)}(y)$$

ces deux fonctions $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{(-1)}$ ayant été étudiées plus haut à propos du passage de MT à Mercator et vice versa (2).

En outre, on utilise les formules de composition des développements déjà introduites plus haut.

(1) Minimum du $\mathcal{L}(\lambda_0) + \mathcal{L}(\pi/2 - \lambda_0)$ (pour $\lambda_0 = \frac{\pi}{4}$) = $\frac{\pi}{2}$ (0, 54 x 2) supérieur à $\frac{\pi}{2}$

(2) On leur avait alors donné le nom de développement (13) et (13 bis).



Mettons sous forme de tableau les données du problème et les connaissances réunies à son sujet :

	Opération	Développement en série		Coefficients (impairs)
		Centre	Désign ⁿ symbolique	
(1)	$\lambda = \mathcal{L}^{(-1)} y$	$y = 0$	((a))	$1 \dots -\frac{1}{6} \dots +\frac{5}{120} \dots$
				$1/\cos \lambda_0$ en facteur
(2)	$y = \mathcal{L}(\lambda_0 + \lambda)$	λ_0	((b)) = $\frac{1}{\cos \lambda_0} ((b_0 + \Delta b))$	1 $+ \frac{t}{2}$ $+ \frac{1}{6} + \frac{t^2}{3}$ $+ \frac{5t+6t^3}{24}$ $+ \frac{5+28t^2+24t^4}{120}$

où $t = \operatorname{tg} \lambda_0$

la notation $(b_0 + \Delta b)$ ayant pour rôle de mettre à part la valeur (b_0) des coefficients pour $\lambda_0 = 0$: termes indépendants de λ . Il est bien évident en effet que, $((b_0))$ étant le réciproque, ou inverse, de $((a))$ dans l'opération $((b)) ((a))$, on aura la simplification

$$Y[\lambda(y)] : \dots ((c)) = \left\{ ((b)) ((a)) \right\} = \frac{1}{\cos \lambda_0} \left[((b_0 + \Delta b)) ((a)) \right] = \frac{1}{\cos \lambda_0} \left\{ 1 + ((\Delta b)) ((a)) \right\}$$

où Δb représente la partie dépendant de t dans le développement "13"

Coefficient Δb	1	2	3	4	5
		$\frac{t}{2}$	$\frac{t^2}{3}$	$\frac{5t+6t^3}{24}$	$\frac{28t^2+24t^4}{120} \dots$

De telle sorte que l'on obtient facilement $((c))$ en n'ayant à tenir compte que des $(\Delta b)_k$ c'est-à-dire des facteurs en t, t^2 etc...

Par application du tableau de composition p.(19) et tenant compte des termes nuls (a d'indice pair: Δb_1) on obtient ainsi, en sous-entendant la mise de $1/\cos \lambda_0$ en facteur, et sous-entendant les $a_1 = 1 \dots$

Ordre	Coefficients c (à multiplier par $\frac{1}{\cos \lambda_0}$)	
1	1	1
2	$\Delta b_2 \cdot 1$	$\frac{t}{2}$
3	Δb_3	$\frac{t^2}{3}$
4	$\Delta b_4 + 2 \Delta b_2 (a_3)$	$(5-4) \frac{t}{24} + \frac{6t^3}{24} = \frac{t}{24} + \frac{t^3}{4}$
5	$\Delta b_5 + 3 \Delta b_3 (a_3)$	$\frac{28}{120} - \frac{1}{6} t^2 + \frac{24t^4}{120} = \frac{t^2}{15} + \frac{t^4}{5}$

$$(17) \quad Y = \frac{1}{\cos \lambda_0} \left(y + \frac{t}{2} y^2 + \frac{t^2}{3} y^3 + \left(\frac{t}{24} + \frac{t^3}{4} \right) y^4 + \left(\frac{t^2}{15} + \frac{t^4}{5} \right) y^5 + \dots \right)$$

Les valeurs ainsi obtenues des coefficients du développement $((c))$ appellent les commentaires suivants :

- 1) les coefficients sont positifs
- 2) les coefficients $((c))$ sont tous plus petits que les $((b))$ correspondants, d'où il résulte que le rayon de convergence est plus grand.

$$\mathcal{L}(\pi/2 - \lambda_0) + \mathcal{L}(\lambda_0) > \mathcal{L}(\pi/2 - \lambda_0)$$

d'une part

d'autre part

- 3) les coefficients de rang pair sont, pour les cas usuels en Géodésie (où $\operatorname{tg} \lambda_0$ est $\leq 0,1$), d'un ordre de grandeur supérieur aux coefficients impairs, qui sont en t^2 .

Pour l'utilisation numérique du développement en série, cette dernière remarque conduirait à grouper les termes de même parité.

D'autre part, le fait que le développement est à termes positifs entraîne que les rapports de coefficients successifs tendent vers le rayon de convergence par valeurs inférieures (comme il avait été remarqué plus haut à propos précisément du développement ((b))), de sorte que le développement est effectivement majoré, dès ses premiers termes, par la série géométrique du rayon de convergence, ce qui en permet un maniement numérique commode (limitation au rang voulu).

On trouve ci-après les valeurs numériques obtenues pour le cas extrême rencontré en Géodésie : fuseaux Mercator Transverse ayant un décalage de 6° en longitude.

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg} 6^\circ = 0,105 & t^2 &= 0,011, \text{ etc...} \\ \text{coefficient } c_4 &= \frac{t}{24} + \frac{t^3}{4} & & 0,00467 \\ c_5 &= \frac{t^2}{15} + \frac{t^4}{5} & & 0,00074 \\ \Delta x &= 100 \text{ km} \leadsto 0,0157 & \Delta x^3 &\neq 4 \cdot 10^{-6} \text{ donc } \frac{c_4 \Delta x^4}{\Delta x} \neq 1,9 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

(18) L'effet du terme de 4ème degré est d'environ 2 mm pour $|\Delta x| = 100 \text{ km}$, ce qui définit les conditions d'application de la méthode de moyenne en carré.

La valeur du terme du 5ème degré est à celle-ci dans le rapport

$$\frac{24}{15} \cdot t \cdot \frac{\Delta x}{1} \neq \frac{1}{500}$$

donc entièrement négligeable.

Les caractères décrits ci-dessus montrent comment le développement se transforme, lorsque son centre subit un déplacement peu important : étant donné la petitesse du coefficient du 5ème ordre, les coefficients du 4ème ordre (dérivée 4ème de la fonction de passage) sont très peu modifiés. Les conclusions pratiques trouvées sur la validité de l'algorithme moyenne en carré, pour le centre ci-dessus adopté (ω) restent donc valables pour toute formule de passage centrée à l'équateur et dont le centre (ω') est situé en un point quelconque entre les deux méridiens centraux des fuseaux.

Revenant au développement centré au point ω , son utilisation en variables réelles est la suivante; soit le développement écrit en variable complexe :

$$\Delta U = (\Delta y + i \Delta x) + c_2 (\Delta y + i \Delta x)^2 + \dots (\text{etc})$$

Considérant la ligne $\Delta y = 0$, c'est-à-dire le méridien central du fuseau f , elle est représentée paramétriquement par

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta x + c_3 \Delta x^3 + c_5 \Delta x^5 + \dots \\ \Delta Y &= -c_2 \Delta x^2 + c_4 \Delta x^4 - c_6 \Delta x^6 + \dots \end{aligned}$$

dans lesquels les coefficients de même parité sont groupés; ce sont les équations paramétriques de l'image du méridien m dans le fuseau F au voisinage du point ω , on s'y reportera ci-après pour vérifier les résultats obtenus ci-dessus au (17).

V. 3 — CENTRE A UNE LATITUDE QUELCONQUE, UTILISATION DES COORDONNÉES DE MERCATOR COMME INTERMÉDIAIRE ET USAGE DES FORMULES DE COMPOSITION (MÉTHODE GÉNÉRALE C).

Utilisant le paramètre descriptif naturel de l'équateur : la longitude, comme variable intermédiaire, la méthode ci-dessus étudiée, en fait, consiste à procéder par composition de développements au moyen des formules de passage des fuseaux MT respectifs aux coordonnées géographiques. Ainsi, pour une latitude quelconque, en procédant de la sorte, on utiliserait les développements :

- (a) Passage de MT à Mercator, centre méridien central
- (b) Passage de Mercator à MT, centre à une longitude $-\lambda_0$ du méridien central

ce développement (b) pouvant être écrit $(b + \Delta b)$ comme il a été fait déjà. On met en évidence ici, en Δb , la variation des coefficients de la formule de passage de Mercator à MT, quand le centre s'éloigne de l'équateur.

Il est bien clair a priori que les coefficients Δb sont des fonctions croissantes de λ_0 , fonctions paires et fonctions impaires, selon l'indice.

Cette méthode a été exclusivement employée par les auteurs qui se sont occupés de ce problème dans le passé. Pour écrire les coefficients $(b + \Delta b)$, ils sont partis des développements (b_0) en y faisant le changement d'origine $+i\lambda_0$, de sorte que les coefficients successifs de $(b + \Delta b)$ se présentent, dans cette méthode, comme des développements en série par rapport à l'argument $(i\lambda_0)$.

Ces séries sont convergentes et se prêtent facilement au calcul numérique, ce qui a permis aux dits auteurs de traiter complètement le problème des formules de passage par cette méthode.

Discussion

L'inconvénient d'une présentation de chaque coefficient sous la forme d'un développement en série peut être évité si les calculs sont faits par formules finies, en introduisant les dérivées successives de la fonction de passage du Mercator au MT pour le centre excentré, utilisant pour cela les formules directes ci-dessous (formules (7) du précédent Chapitre III où l'on a remplacé x par Y et y par $\frac{\pi}{2} - X$)

Notations :

- coordonnées rectangulaires Mercator : q, λ
 (19) coordonnées rectangulaires Mercator Transverse X, Y

$$(1) \quad \operatorname{tg} X = \cos \lambda \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad \varphi = \mathcal{L}^{-1} q$$

$$(2) \quad \operatorname{th} Y = \sin \lambda \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

Pour obtenir les coefficients c , on terminerait par l'application des formules de composition, qui présentent chaque coefficient c comme une somme de termes en nombre fini (du type $c_4 = b_4 a_1^4 + 4 b_3 a_2^2 + \text{etc.}$)

En poursuivant cette idée, on en viendra à renoncer entièrement à l'intermédiaire de la projection de Mercator, puisqu'aussi bien cet intermédiaire tombe en défaut au fur et à mesure qu'on se rapproche du pôle, et à chercher un traitement du problème de passage de fuseau à fuseau par formule directe. C'est ce qui peut être fait par la méthode générale N° 2 : utilisation des équations paramétriques, dans la projection F , de l'image du méridien central rectiligne m de la projection f . Le traitement par cette méthode fait l'objet du paragraphe suivant.

Cela revient à utiliser les équations ci-dessus, mais d'une autre manière : on y considérera X comme un paramètre fixé égal à λ_0 et $\frac{\pi}{2} - \varphi$, seule variable indépendante, est remplacé par la notation x .

V. 4 — TRAITEMENT DU PROBLÈME A PARTIR DES FORMULES EXPLICITES DU PASSAGE DE (f) à (F) CENTRÉES SUR LE MÉRIDIEEN CENTRAL DE (f). OBTENTION DES COEFFICIENTS PAR DÉRIVATION (*).

D'après ce qu'on a indiqué précédemment : principe de la méthode générale N° 2, les formules analytiques de passage se déduisent des formules représentant le méridien central M du fuseau (f) dans les coordonnées du système (F), en y substituant la variable complexe (z) à la variable réelle (x) qui désigne l'arc de (M).

Particularisons le problème en choisissant le centre de formule sur le méridien central du fuseau (f), donc sur la ligne $y = 0$, en dans la position montrée par la figure.

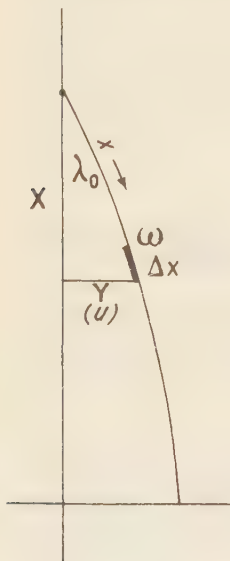
L étant un point courant, marqué par le paramètre x , que nous écrirons plus loin $x_\omega + \Delta x$, ses coordonnées dans le fuseau F sont, d'après la trigonométrie sphérique et la définition de la projection MT

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \operatorname{tg} X = \cos \lambda_0 \cdot \operatorname{tg} (\pi/2 - \varphi) = \cos \lambda_0 \cdot \operatorname{tg} x \\ Y &\rightarrow \operatorname{th} Y = \sin \lambda_0 \cdot \sin (\pi/2 - \varphi) = \sin \lambda_0 \cdot \sin x = \sin u \end{aligned}$$

- (1) $\operatorname{tg} X = \operatorname{tg} x \cdot \cos \lambda_0$
- (2) $\operatorname{th} Y = \sin u = \sin x \cdot \sin \lambda_0$
- (3) $\operatorname{th} X = \cos \lambda_0 \operatorname{tg} (x_\omega + \Delta x)$
- (4) $\operatorname{th} Y = \sin \lambda_0 \cdot \sin (x_\omega + \Delta x)$

La question qui nous occupe revient à étudier le développement analytique $X(x)$ et $Y(x)$ lorsque le point central ω se déplace entre Pôle et Equateur; cela revient donc à étudier la variation des dérivées successives de ces deux fonctions, pour ω décrivant le méridien du Pôle à l'Equateur.

La figure fait apparaître le caractère périodique des relations $X(x)$, $Y(x)$, qui renseignent sur les dérivées successives, elles aussi périodiques, bornées, présentant des symétries par rapport aux points $x = 0 + k \frac{\pi}{2}$ images des pôles et des points à l'équateur dans le fuseau.



(*) Le présent paragraphe 5,4 qui contient l'étude approfondie des formules de passage de fuseau à fuseau par voie directe, peut être omis sans inconvénient dans une première lecture. Il représente en effet l'application d'une méthode de travail particulière qui ne dépend pas des méthodes générales employées par ailleurs. Ce paragraphe offre en revanche un intérêt positif pour les spécialistes ayant en vue des applications numériques précises.

Nous étudions tout d'abord la relation (1)

$$\operatorname{tg} X = \cos \lambda_0 \operatorname{tg} x$$

dont la solution formelle est donnée par un développement classique en série de Fourier, où $\operatorname{tg}^2 \frac{\lambda_0}{2} = u^2$ est argument ($u^2 \leq 1$)

$$(20) \quad X = x - \alpha^2 \frac{\sin 2x}{1} + (\alpha^2)^2 \frac{\sin 4x}{2} - (\alpha^2)^3 \frac{\sin 6x}{3} + \dots$$

qui donne par dérivation successive

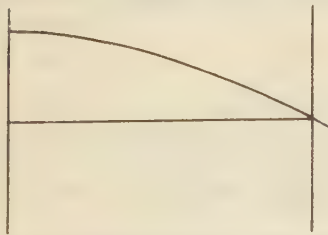
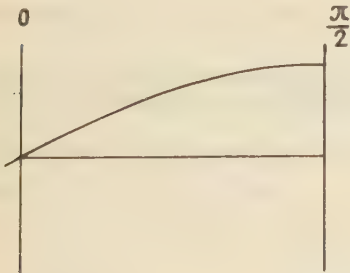
$$\begin{aligned} X' &= 1 + 2 \alpha^2 \left[-\cos 2x + \alpha^2 \cos 4x - (\alpha^2)^2 \cos 6x + \dots \right] \\ X'' &= 4 \alpha^2 \left[+\sin 2x - 2 \alpha^2 \sin 4x + 3 (\alpha^2)^2 \sin 6x + \dots \right] \\ X''' &= 8 \alpha^2 \left[\cos 2x - 2 \alpha^2 \cos 4x + 3 (\alpha^2)^2 \cos 6x + \dots \right] \\ X^{IV} &= -16 \alpha^2 \left[\sin 2x - 2 \alpha^2 \sin 4x + \dots \right] \\ &\text{etc} \end{aligned} \quad \lambda_0 < 6^\circ$$

$$\alpha^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda_0}{2} \leq \frac{1}{400}$$

En géodésie, pour les changements de fuseau, λ_0 est normalement petit; de telle sorte que le poids prépondérant est tenu par les premiers termes provenant de $\sin 2x$. On en déduit l'allure des dérivées successives et l'estimation de leur valeur numérique.

Si, pour un problème particulier, on a besoin d'étudier un cas où λ_0 est sensiblement plus grand, le deuxième terme (en $\cos 4x$, $\sin 4x$) pourra introduire une perturbation dans les dérivées d'ordre élevé, comme l'indique la figure, la discussion numérique du phénomène restant facile à traiter dans chaque cas d'espèce.

Dérivées successives de $Y(x)$.



Dérivée 1^{ère}



Dérivée 2^e

Le calcul des dérivées successives de $X(x)$ s'appuierait sur la relation

$$\frac{dX}{\cos^2 X} = \frac{dx}{\cos^2 x} \cos \lambda_0 \quad \text{d'où, puisque } \cos x = \cos X \cos u$$

$$(21) \quad \frac{dX}{dx} = \frac{\cos \lambda_0}{\cos^2 u} = \frac{\cos \lambda_0}{(1 - \sin^2 \lambda_0 \sin^2 x)} = \cos \lambda_0 (\cos^2 u)^{-1}$$

d'où, en dérivant

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} &= \cos \lambda_0 (\cos^2 u)^{-2} (2 \sin x \cos x) \sin^2 \lambda_0 \\ &= \frac{\cos \lambda_0}{\cos^4 u} \sin^2 \lambda_0 \sin 2x \\ &= A (\cos^2 u)^{-2} \sin 2x \end{aligned}$$

Les dérivées successives s'obtiennent, comme on voit, par la méthode des fonctions composées, en utilisant $\cos^2 u$ comme fonction intermédiaire.

On obtient ainsi :

$$\frac{d^3 X}{dx^3} = \frac{\cos \lambda_0}{\cos^4 u} \sin^2 \lambda_0 \cdot 2 \cos 2x - \frac{2 \sin^2 \lambda_0 \sin^2 2x}{\cos^2 u} \quad \text{etc....}$$

Ces formules recourent et précisent les résultats obtenus ci-dessus par la série de Fourier : pour les cas usuels, les facteurs $\cos \lambda_0$ et $\cos u$ sont à considérer comme très voisins de un puisque λ_0 est petit.

VALEURS MAXIMUM DES DERIVEES DE $X(x)$

Pour les dérivées d'ordre impair 3 et 5, qui nous intéressent particulièrement, les valeurs maximum sont atteintes en $x = 0$ et $x = \pi/2$, valeurs qu'on peut déterminer exactement; évitant la sommation des séries de Fourier, les méthodes de calcul direct conduisent aux résultats suivants :

a) au voisinage de $x = 0$, formule $\operatorname{tg} X = \operatorname{tg} x \cos \lambda_0$

Développement

$$(22) \quad X = \cos \lambda_0 \left\{ x + \sin^2 \lambda_0 \frac{x^3}{3} - \sin^2 \lambda_0 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \lambda_0 \right) \frac{x^5}{5} + \dots \right\}$$

b) au voisinage de $x = \pi/2$, en posant $\frac{\pi}{2} - x = x'$,

La formule est $\operatorname{tg} X' = \operatorname{tg} x' \sec \lambda_0$, le développement se déduit du précédent par analogie, en échangeant le rôle de $\cos \lambda_0$ et $\sec \lambda_0$, d'où

$$(22) \quad X' = \sec \lambda_0 \left\{ x' - \operatorname{tg}^2 \lambda_0 \frac{x'^3}{3} + \operatorname{tg}^2 \lambda_0 \left(\frac{1}{3} + \operatorname{tg}^2 \lambda_0 \right) \frac{x'^5}{5} \dots \right.$$

C'est le développement qui a été obtenu plus haut par la méthode générale N° 1 pour le centre à l'équateur.

Pour la dérivée 4ème, le point maximum est en $x = \pi/4$ (ce qui correspond à une formule centrée à la latitude moyenne); la valeur maximum du terme correspondant est, d'après (2*) :

$$\frac{16}{24} \operatorname{tg}^2 \lambda_0 \frac{x^4}{2} = \frac{16}{6} \operatorname{tg}^2 \lambda_0 \frac{x^4}{4} < \frac{2}{3} (2 \operatorname{tg}^2 \lambda_0) \frac{x^4}{4}$$

Regroupant ces valeurs extrêmes de coefficients 3,4,5

Pôle = 45°	$\sin^2 \lambda_0 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} (2 \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda_0}{2})^2 \cdot \frac{1}{4}$	$-\sin^2 \lambda_0 \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \lambda_0 \right) \cdot \frac{1}{5}$	Pôle Lat. 45°
Equateur	$-\operatorname{tg}^2 \lambda_0 \cdot \frac{1}{3}$		$+\operatorname{tg}^2 \lambda_0 \left(\frac{1}{3} + \operatorname{tg}^2 \lambda_0 \right) \cdot \frac{1}{5}$	Equateur

on constate que ces coefficients initiaux du développement $X(x)$ ont un facteur commun de l'ordre de λ_0 ; leurs rapports successifs sont inférieurs à un; l'influence numérique des termes correspondants est aisément calculée, en tenant compte que pour le passage aux unités pratiques, un correspond à 6.300 km, et $|\Delta x|$ est de l'ordre de 100 km environ.

ETUDE DE LA RELATION $Y(x)$

$$(2) \quad \operatorname{th} Y = \sin \lambda_0 \sin x$$

L'étude des symétries est immédiate : la fonction Y est paire au voisinage de $x = \pi/2$

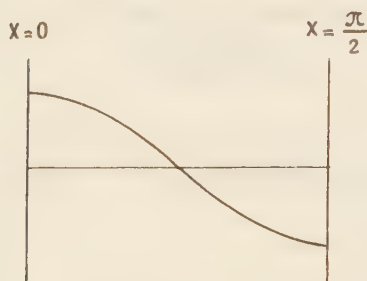
impaire au voisinage de $x = 0$

Les valeurs maxima des dérivées paires sont à $x = \frac{\pi}{2}$, les maxima des dérivées impaires pour $x = 0$.

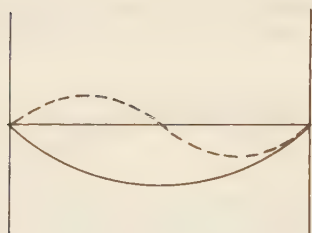
On peut calculer les valeurs explicites des dérivées en ces points par la méthode de composition, les développements composants étant

$$\begin{aligned} ((b)) \quad Y &= \operatorname{Arg} \operatorname{th} u & (u &= \sin \lambda_0 u') \\ ((a)) \quad u' &= \sin x \end{aligned}$$

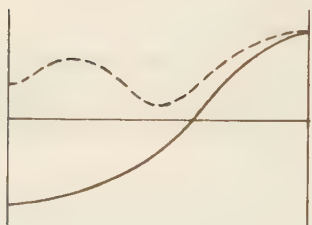
Dérivées successives de $X(x)$.



Dérivée 3^e



Dérivée 4^e



Dérivée 5^e

DEVELOPPEMENT AU VOISINAGE DE $x = 0$

Les deux développements composants étant impairs, les formules se simplifient :

	sinus	Arg th
$c_1 = a_1 b_1$	$a_1 = 1 (\cdot \sin \lambda_0)$	$b_1 = 1$
$c_3 = a_3 b_1 + a_1^3 b_3$	$a_3 = -\frac{1}{6} (\cdot \sin \lambda_0)$	$b_3 = +\frac{1}{3}$
$c_5 = a_5 b_1 + a_3 a_1^2 3 b_3 + a_1^5 b_5$	$a_5 = +\frac{1}{120} (\cdot \sin \lambda_0)$	$b_5 = +\frac{1}{5}$

où l'on remarque que chaque a , présentant pour nous un facteur $\sin \lambda_0 = a$ qui est petit, le premier terme est prépondérant.

Le développement ((C)) reproduit donc sensiblement les coefficients du développement du sinus x multipliés par $\sin \lambda_0$.

DEVELOPPEMENT AU VOISINAGE DE $x = \pi/2$, EN POSANT $x' = \pi/2 - x$

Le développement ((a)) est ici pair. Nous n'écrivons pas explicitement les coefficients de ((b)), qui sont très voisins des valeurs ci-dessus (puisque par hypothèse $\sin \lambda_0$ est petit). Il s'est introduit des coefficients ((b)) d'ordre pair très petits.

On retrouvera ainsi :

$$c_2 = a_2 b_1$$

$$c_4 = a_4 b_1 + a_2^2 b_2 + \dots$$

$$\cosinus (\cdot \sin \lambda_0)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \sin \lambda_0$$

$$a_2 = \frac{1}{24} \sin \lambda_0$$

$$\text{Arg th}$$

$$b_1 = 1 + \varepsilon = 1/\cos^2 \varphi$$

$$b_2 = \varepsilon' = \sin \varphi / \cos^4 \varphi$$

dans lesquels le premier terme est prépondérant, le terme suivant étant d'ordre $(\sin^2 \lambda_0)$ par rapport à lui.

On a représenté par des ε des coefficients b qui sont petits en même temps que $\sin \lambda_0$.

Le développement autour $x = \pi/2$ reproduit donc sensiblement les coefficients du développement de $\sin x$, multipliés par $\sin \lambda_0$.

Remarquons qu'en ce même point, le développement exact obtenu plus haut par la méthode générale N° 1 était

$$Y(x) = \frac{1}{\cos \lambda_0} \left[-\operatorname{tg} \lambda_0 \frac{x^2}{2} + (\operatorname{tg} \lambda_0 + 6 \operatorname{tg}^3 \lambda_0) \frac{x^4}{24} + \dots \right]$$

qui redonne bien le résultat ci-dessus :

En conclusion, le développement $Y(x)$ se présente, pour λ_0 petit, comme une reproduction du développement de $\sin x$, l'effet des puissances suivantes de λ_0 pouvant être évalué en chaque cas par la méthode de composition, qui fournira le coefficient cherché comme une somme finie de termes.

V. 5 — ASSIMILATION DU PROBLÈME AU PROBLÈME GÉNÉRAL DU TRACÉ D'UNE LIGNE GÉODÉSIQUE SUR UNE PROJECTION.

Reprenons les considérations employées au Chapitre III, formules (12) et (13) :

Appelons m l'échelle locale de la projection, X' et Y' les cosinus directeurs de la tangente à la courbe par rapport aux axes.

Le traitement du problème dépend du système différentiel

$$(23) \quad \frac{d^2 x}{ds^2} = a (X'^2 - Y'^2) + b (2 X' Y') \quad a = \frac{dm}{mdx}$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -b (X'^2 - Y'^2) + a (2 X' Y') \quad b = \frac{dm}{mdy}$$

qui développe la formule intrinsèque $\Gamma = \frac{d \log m}{dn}$ adoptée habituellement par les Géodésiens pour la résolution numérique de ce problème.

On remarque que le système peut s'écrire, en notations complexes

$$(24) \quad d^2 z/ds^2 = \alpha (dz/ds)^2 \quad \text{posant } \alpha = a - ib$$

qui permet de calculer les dérivées successives de z par rapport à s , en fonction des dérivées par rapport à s de la quantité

$$\alpha = a - ib = \frac{\delta(\log m)}{\delta x} - i \frac{\delta(\log m)}{\delta y}$$

Pour le cas général d'une projection quelconque, on déduirait la fonction m et ses dérivées de l'équation aux dérivées partielles qui domine le problème des projections conformes

$$- \left[\left(\frac{\delta m}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta m}{\delta y} \right)^2 \right] + m \left(\frac{\delta^2 m}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 m}{\delta y^2} \right) = K \quad (\text{courbure totale de la surface à représenter})$$

trouvée par GAUSS.

Pour le cas présent, l'échelle, a priori, n'est fonction que de y ; l'équation ci-dessus prend la forme simplifiée

$$- \left(\frac{\delta m}{\delta y} \right)^2 + m \frac{\delta^2 m}{\delta y^2} = K$$

qui est satisfaite par la fonction $m = \operatorname{ch} y$

On a, dans ces conditions, en utilisant la variable intermédiaire ψ telle que $\operatorname{ch} y = \frac{1}{\cos \psi}$ (ψ représente la distance en arc à la ligne de base; c'est la quantité qui avait été notée u au § 5, 4 ci-dessus)...

$$\alpha = 0 - i \frac{\delta \log m}{\delta y} = -i \sin \psi$$

et, comme le long de l'arc de grand cercle, ligne géodésique de la sphère, on sait que

$$\sin \phi = \sin \lambda_0 \sin s$$

on voit finalement que les dérivées successives de α par rapport à s sont en évidence. On aura ainsi

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 z}{ds^2} &= \alpha (dz/ds)^2 = \frac{d\alpha}{ds} \left(\alpha \frac{dz}{ds} \right) \\ \frac{d^3 z}{ds^3} &= \frac{d\alpha}{ds} (dz/ds)^2 + 2 \alpha (dz/ds) \frac{d^2 z}{ds^2} \\ &= (dz/ds)^2 \frac{d\alpha}{ds} + 2 \alpha (dz/ds)^3 = \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \left[\frac{d\alpha}{ds} + 2 \alpha^2 (dz/ds) \right] \\ \frac{d^4 z}{ds^4} &= (dz/ds)^2 \left[\frac{d^2 \alpha}{ds^2} + \frac{d\alpha}{ds} 6 \alpha dz/ds + 6 \alpha^3 (dz/ds)^2 \right] \\ \frac{d^5 z}{ds^5} &= (dz/ds)^2 \left[\frac{d^3 \alpha}{ds^3} + 8 \frac{d^2 \alpha}{ds^2} dz/ds + 6 \frac{d\alpha}{ds}^2 dz/ds + \right. \\ &\quad \left. + 36 \frac{d\alpha}{ds} \alpha^2 (dz/ds)^2 + 24 \alpha^4 (dz/ds)^3 \right] \end{aligned}$$

Introduisant les cosinus directeurs u et v de la ligne géodésique par rapport aux axes x et y , on a, puis-que $m = 1/\cos \phi$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\cos \phi} (u + iv) = \frac{1}{\cos \phi} (\sin z + i \cos z) \quad (z : \text{azimut})$$

$$\begin{aligned} \text{d'autre part} \quad \alpha &= i \sin \phi \\ &= i \sin \lambda_0 \sin s \quad \text{donc} \end{aligned}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \cotg s = v \cdot \cotg \phi, \quad \frac{d^2 \alpha}{ds^2} = -1, \quad \text{etc ...}$$

et enfin

$$\alpha \frac{dz}{ds} = -i (u + iv) \frac{1}{\cos \phi} \cdot \sin \phi = -i \tg \phi (u + iv)$$

Ce tableau de formules permet de calculer facilement les dérivées successives de z par rapport à s , en utilisant comme paramètres les cosinus directeurs u et v de la ligne au point courant, ainsi que la quantité ϕ qui matérialise la distance (en arc sphérique) où l'on se trouve de la ligne de base. On a ainsi successivement :

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{1}{\cos \phi} (u + iv) \\ \frac{d^2 z}{ds^2} &= \frac{1}{\cos \phi} (-i) \tg \phi (u + iv)^2 \\ &\quad \text{majoré par } \tg \phi \\ \frac{d^3 z}{ds^3} &= \frac{1}{\cos \phi} (-i) [v (u + iv)^2 - 2 i \tg^2 \phi (u + iv)^3] \\ &\quad \text{majoré par } 1 + 2 \tg^2 \phi \\ \frac{d^4 z}{ds^4} &= \frac{1}{\cos \phi} (-i) [-\tg \phi (u + iv)^2 - 6 i \tg \phi v (u + iv)^3 - 6 \tg^3 \phi (u + iv)^4] \\ &\quad \text{majoré par } [t \{ \max. \text{ module } 1 + 6 i v (u + iv) \} + 6 t^3] \\ &\quad \text{c.a.d. } 5 t + 6 t^3 \text{ (pour } v = 1, u = 0) \\ \frac{d^5 z}{ds^5} &= \frac{1}{\cos \phi} (-i) (u + iv)^2 [-v + 8 i \tg^2 \phi (u + iv) - 6 i v^2 (u + iv) \\ &\quad + 36 i v \tg^2 \phi (u + iv)^2 + 24 i \tg^4 \phi (u + iv)^3] \\ &= \frac{1}{\cos \phi} (-i) (u + iv)^2 [-v (1 + 6 i v (u + iv)) - \\ &\quad - \tg^2 \phi (u + iv) (8 i - 36 v (u + iv)) \dots \\ &\quad + 24 i \tg^4 \phi (u + iv)^3] \\ &\quad \text{majoré, de même, pour } v = 1, u = 0, \\ &\quad \text{par } 5 t + 28 t^2 + 24 t^4 \end{aligned}$$

L'on constate ainsi que le développement est majoré, terme à terme, par le développement particulier obtenu pour $u = \text{zéro}$, c'est-à-dire pour la ligne géodésique perpendiculaire à la ligne de base, le long de laquelle le taux de variation de l'échelle est le plus rapide.

Les formules ci-dessus sont tout à fait générales, elles permettent le tracé d'une orthodromie quelconque à partir d'un point quelconque d'une projection Mercator (ou Mercator Transverse); si on désire les utiliser au cas particulier d'un passage de fuseau Mercator Transverse à fuseau Mercator Transverse, on aura soin de remplacer les quantités u et v par leurs valeurs en se rappelant que

$$\cos \phi \neq 1 \quad u \neq 1 \quad v \leq \sin \lambda_0 \quad (\text{petit})$$

et, de même,

$$\operatorname{tg} \phi \leq \operatorname{tg} \lambda_0 \quad (\text{petit})$$

Pour l'application pratique du problème de changement de fuseau MT, on retient des calculs ci-dessus l'expression explicite de la dérivée quatrième $\frac{d^4 z}{ds^4}$ - que dans cette application on notera $\frac{d^4 U}{dx^4}$ pour la mettre en harmonie avec les notations précédentes.

$$(27) \quad \frac{d^4 z}{ds^4} \sim \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos \phi} [-8v + i]$$

L'étude par les formules explicites $X(x)$ $Y(x)$ avait montré que la dérivée 4ème, pour $X(x)$, nulle au pôle et à l'équateur, est maximum au voisinage de la latitude moyenne : l'examen de la formule ci-dessus montre cette dérivée 4ème formée, en effet, avec le facteur $\frac{-1}{\cos \phi} \operatorname{tg} \phi \cdot v$ multipliant une expression pratiquement constante et égale à un, avec les hypothèses ci-dessus sur u et v .

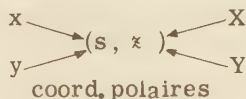
De même, on reconnaît à la composante selon $Y(x)$ une valeur sensiblement égale à $\frac{1}{\cos \phi} \operatorname{tg} \phi$. Dans les cas usuels, cette composante est notablement supérieure à la précédente ($v \leq 1/8$).

On voit par là l'influence dominante de la distance entre les deux lignes de base pour déterminer la valeur du résidu dans la formule de moyenne en carré.

Avant de quitter cet examen du problème du tracé de la ligne géodésique, il y a lieu de souligner toute son importance dans l'emploi pratique des projections conformes. En effet, le but essentiel de celles-ci est l'exécution de report, sur le plan, de rayonnements en coordonnées polaires correspondant à des mesures faites sur la surface et inversement, la traduction en distance et direction vraie, de segments rectilignes définis par les coordonnées conformes de leurs extrémités.

REMARQUE IMPORTANTE

La disponibilité de formules précises, allant jusqu'au 4ème ordre et plus, pour le report des coordonnées, d'après s et z , sur des projections conformes, fournit une méthode tout à fait générale, et applicable dans tous les cas pour le passage d'une projection à l'autre : en effet, on prendra la chaîne d'opérations suivante :

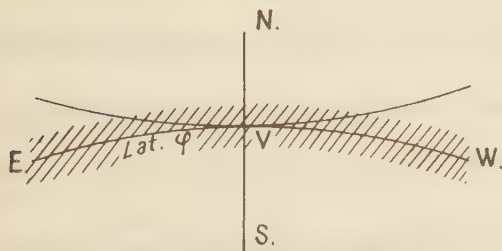


qui correspond à l'élimination de s et z entre les deux groupes de formules relatifs aux projections respectives.

Cette méthode se prête à une application numérique facile pour la Géodésie: l'intermédiaire des coordonnées polaires vraies, sur la surface, permet au calculateur exercé de construire de proche en proche l'image sur le plan XY d'une grille carrée existant sur le plan xy , en vue d'appliquer ensuite les méthodes d'interpolation complexe.

APPLICATION POUR LE CHANGEMENT DE PROJECTION, L'UNE DES PROJECTIONS ETANT DEFINIE PAR UNE GEODESIQUE QUELCONQUE COMME LIGNE DE BASE

Au commencement de la 2ème partie, on avait signalé l'existence de certaines projections basées sur des grands cercles quelconques. Ces projections, dites "décuménales" sont isolées, et il ne se pose à leur sujet que des problèmes de transformation en Mercator, Lambert ou Mercator Transverse.



Projection décuménale.

La connaissance de la représentation paramétrique de la ligne géodésique fournit la solution du problème du passage de cette projection à une autre, selon la méthode qui a été considérée en 2° parmi les méthodes générales (extension à l'argument z , remplaçant s , des formules paramétriques $X(s) \dots Y(s)$.

On peut remarquer, au surplus, que, dans le cas particulier où la projection est axée sur un segment de ligne Ouest Est (c'est-à-dire prise autour de son vertex), elle se présente de manière à ce que le problème devienne tout à fait identique à l'un de ceux traités précédemment :

Passage de "décuménale" à MT $\equiv$ passage de Mercator à MT

Passage de décuménale à Mercator $\equiv$ passage de MT à MT, fuseau adjacent, mais ici avec un décalage λ_0 important, qui est la latitude du vertex de la projection décuménale.

Pour le passage au LAMBERT, on a une application aisée de la méthode générale N° 1 (relation des projections sur le méridien central), ou bien l'on prend l'intermédiaire de la projection Mercator.

VI. 6 — SYNTHÈSE DES RÉSULTATS ACQUIS AU SUJET DU DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE REPRÉSENTANT LE CHANGEMENT DE FUSEAU DE MERCATOR TRANSVERSE.

La méthode générale N° 1 a permis de formuler des développements pour le centre à l'équateur, développements à termes positifs, et dont le rayon de convergence est en évidence d'après les points critiques.

L'étude des formules explicites de la transformation, présentée plutôt comme une étude des formules représentant, sur l'un des fuseaux, le méridien de base de l'autre, a précisé la position des maximum et des minimum des dérivées, les dérivées impaires ayant leurs extrêmes aux pôles et à l'équateur, et les dérivées paires ayant, en ce qui concerne Y, leur maximum à l'équateur, et, en ce qui concerne X, un maximum à une latitude moyenne.

Ces mêmes formules explicites se sont prêtées aisément à une méthode par développements en série, (envisagée par rapport aux puissances croissantes de l'argument λ_0), qui fournit, pour toutes les valeurs nécessaires des coefficients, des estimations suffisamment approchées pour tous les cas de la pratique usuelle où les fuseaux sont peu distants.

La méthode par composition des transformations, emploi de l'intermédiaire de la projection de Mercator, présente les coefficients cherchés sous la même forme que ci-dessus, comme des développements en série par rapport aux puissances de λ_0 ; les deux méthodes se fournissent donc un contrôle mutuel, sans toutefois enseigner aucune propriété vraiment générale du développement. Il importe de remarquer cependant que cette méthode a l'avantage d'être utilisable pour un centre tout à fait arbitraire, c'est-à-dire non nécessairement situé sur l'axe de l'un des fuseaux; pour la pratique, il y a là un avantage intéressant.

La méthode s'appuyant sur une représentation paramétrique du méridien central d'un fuseau dans les coordonnées de l'autre, formules paramétriques établies à partir des équations différentielles générales de la ligne géodésique, offre l'avantage principal de n'être subordonnée à aucune hypothèse sur la grandeur de λ_0 (*); elle montre que le développement en un point est majoré par un autre développement, précédemment étudié, qui est celui de la fonction $\mathcal{L}(s)$ au même point. Toutefois, ces indications sont très largement majorantes dans le cas normal, étant donné que l'inclinaison de la ligne géodésique, par rapport à l'axe cartésien, est bien plus proche de 0 (où le développement prend la forme obtenue en toute première instance) que de $\frac{\pi}{2}$.

Les expressions des coefficients ainsi obtenus donnent bien comme valeurs particulières les expressions déjà trouvées dans le cas où l'une des précédentes méthodes avait fourni les valeurs rigoureuses : ainsi en est-il aux pôles et à l'équateur.

En définitive, on a donc rassemblé un lot de formules diverses qui se vérifient mutuellement et qui ont chacune des avantages particuliers. (Voir Tableau 29 ci-après).

RESULTATS ACQUIS EN CE QUI CONCERNE L'APPLICATION DES INTERPOLATIONS DE 4° ET 5° DEGRE

(28) Pour une valeur donnée de λ_0 , l'erreur maximum à attendre, dans l'emploi de l'algorithme de moyenne en carré, se rencontre pour le centre de formule à l'équateur, et, dans ce cas, le résidu est, pour une maille de 100 km de rayon et pour $\lambda_0 = 6^\circ$ (maximum rencontré dans la pratique géodésique) inférieur à 2 mm. Le résidu fourni par l'interpolation à 5 points, est partout inférieur à la valeur à l'équateur, et celle-ci elle-même est très inférieure au millimètre (pour le même problème particulier).

Cette valeur numérique, très petite, du terme du 5ème ordre du développement en série, entraîne que la variation du résidu de l'interpolation en carré est pratiquement nulle dans une zone de quelques centaines de kilomètres de diamètre, maximum à rencontrer dans les applications géodésiques.

Enfin, il y a lieu de souligner que l'expression de ce coefficient de 4ème ordre, soit dans sa forme rigoureuse, soit dans sa forme approchée (27) montre que le résidu, dans l'algorithme de moyenne en carré, est sensiblement proportionnel à la distance de deux courbes de base, à l'endroit où l'on se trouve.

VI. 7 — PRÉSENTATION D'EXEMPLE NUMÉRIQUE.

On donne ci-dessus l'exemple numérique relatif au cas de deux fuseaux Mercator Transverse offrant un décalage de 6° en longitude.

Les coordonnées sont extraites des Tables numériques traitant ce problème [(9) de la liste bibliographique] .

Le 1er tableau est l'exposé numérique de la relation de fuseau à fuseau le long de l'Equateur, qui est une ligne droite dans les deux systèmes.

(*) Ce qui trouve des applications pratiques pour divers problèmes de Géodésie et de Cartographie; par exemple, le tracé d'un système azimutal ou de coordonnées polaires sur la projection de Mercator, ou bien le traitement du problème général des changements de coordonnées sphériques.

TABLEAU RECAPITULATIF DES FORMULES RELATIVES AU CHANGEMENT DE FUSEAU

Composante X				Composante Y			Remarques
Latitude du centre, φ	Genèse	Coefficient 4e ordre	Coefficient 5e ordre	Genèse	Coefficient 4e ordre	Coefficient 5e ordre	
I Equateur	Méthode N° 1	0	$\frac{\text{tg}^2 \lambda_0}{15} + \frac{\text{tg}^2 \lambda_0}{5}$		$\frac{\text{tg} \lambda_0}{24} + \frac{\text{tg}^3 \lambda_0}{4}$		
II φ	Formules explicites $\text{tg X} = \cos \lambda_0 \text{tg x}$ (Série de Fourier) $= -\frac{8}{24} \sin x \cos x (2 \text{tg}^2 \frac{\lambda_0}{2})$	$\frac{1}{24} \cdot 16 \cdot \text{tg}^2 \frac{\lambda_0}{2} (-\sin 2x) + \dots$ $= -\frac{8}{24} \sin x \cos x (2 \text{tg}^2 \frac{\lambda_0}{2})$	$\frac{1}{120} 32 \text{tg}^2 \frac{\lambda_0}{2} (-\cos 2x)$	Formules explicites $\text{th Y} = \sin \lambda_0 \sin x$	$\frac{1}{24} \sin x \sin \lambda_0 + \dots$	$\frac{1}{120} \cos x \sin \lambda_0 + \dots$	On pose $x = \frac{\pi}{2} - \varphi$
	Composition (par intermédiaire de Mercator)	$-\frac{8}{24} \sin \varphi \cos \varphi (\lambda_0^2) + \dots$			$\frac{1}{24} [\lambda_0 \cos \varphi + (\dots) \lambda_0^3 \cos^3 \varphi]$		
	Ligne géodésique	Coefficient du 4e ordre $\frac{1}{24} \frac{i}{\cos \theta} \text{tg } \theta (u^2 - v^2 + 2iuv) + 6i \text{tg } \theta v (u + iv)^5 + 6 \text{tg}^3 \theta (u + iv)^4$ Coefficient du 5e ordre $\frac{1}{120} \frac{i}{\cos \theta} [u + iv]^2 [v - 8i \text{tg}^2 \theta (u + iv) + 6iv^2 (u + iv) - 36iv \text{tg}^2 \theta (u + iv)^2 - 24i \text{tg}^4 \theta (u + iv)^3]$					θ : distce en arc à la ligne de base. Les termes principaux sont soulignés Composante X Composante Y
90° Pôle	Formules explicites $\text{tg X} = \cos \lambda_0 \text{tg x}$	zéro	$-\cos \lambda_0 \frac{\sin \lambda_0}{5} (\frac{1}{3} - \sin \lambda_0)$	Formules explicites $\text{th Y} = \sin \lambda_0 \sin x$	zéro	$\frac{1}{120} \sin \lambda_0 (\frac{1-20 \sin \lambda_0}{+24 \sin^3 \lambda_0})$	

On vérifie que les valeurs des coefficients a calculés d'après les différences finies de ce tableau, concordent avec les valeurs numériques prévues par les formules (16) et (17) du § 5, 2 de ce Chapitre. Le terme du 4ème ordre, à 100 km, a la valeur 2 mm. Le terme du 5ème ordre apparaît entièrement négligeable dans les unités employées.

Tableau I

ETUDE DE LA TRANSFORMATION DE FUSEAU A FUSEAU LE LONG DE L'EQUATEUR

Dans le fuseau oriental	Dans le fuseau occidental	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
200.000	867.992, 960	100.138, 991			
300.000	968.131, 951	100.304, 865	165, 874		
400.000	1.068.436, 816	100.471, 230	166, 365	0, 491	
500.000	1.168.908, 046	100.638, 131	166, 901	0, 536	0, 045
600.000	1.269.546, 177	100.805, 611	167, 480	0, 579	0, 043
700.000	1.370.351, 788	100.973, 718	168, 107	0, 627	0, 048
800.000	1.471.325, 506				

(l'axe central des fuseaux reçoit par convention la coordonnée E = 500.000)

Coefficients

- Expressions algébriques dans (16) et (17) $\frac{t}{2} \frac{0,105}{2} = \frac{t^2}{3} = \frac{0,011}{3} = 0,00467$

Changement d'unité des radians aux km et m $10^5 (0,0157) \quad 10^5 (244.10^{-6}) (383.10^{-9})$

- Valeurs numériques $a_n \neq \frac{\Delta^n}{n!}$ au point moyen : 500.000 100,491 83,5 0,090 0,0019

- Rapport des coefficients successifs $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ 1204 927 47,4

- Rapport $\frac{a_2}{a_4}$ 43.900

- Rayon de convergence R (distance au point critique le plus proche) 188 (unité : 100 km)

R^2 (à comparer à $a_2 : a_n$) 37.900

Le 2ème tableau est l'illustration numérique des études de la forme de l'image, dans un des fuseaux (le fuseau occidental), du méridien central de l'autre fuseau (fuseau oriental) (§ 5, 4 et 5, 5). Les coordonnées sont extraites des tables déjà mentionnées.

Tableau II

IMAGE, DANS LE FUSEAU OCCIDENTAL, DU MERIDIEN CENTRAL DU FUSEAU ORIENTAL
COORDONNEES DES POINTS COURANTS DE 100 EN 100 KM

e = 500.000 m

n	E	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
4.700km	993.480,159	-7.157,834			
4.800	986.322,325	-7.276,720	-118,886	+1,856	
4.900	979.045,605	-7.393,750	-117,030	+1,885	+0,029
5.000	971.651,855	-7.508,895	-115,145	+1,911	+0,026
5.100	964.142,960	-7.622,129	+113,234	+1,932	+0,021
5.200	956.520,831	-7.733,431	+111,302		
5.300	948.787,400				

e = 500.000 m

n	N	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
4.700	4.717.473,754	+39,750			
4.800	4.817.513,504	+22,443	-17,307	-0,013	
4.900	4.917.535,947	+5,123	-17,320	+0,006	+0,019
5.000	5.017.541,070	-12,191	-17,314	+0,021	+0,015
5.100	5.117.528,879	-29,484	-17,293	+0,040	+0,019
5.200	5.217.499,395	-46,737	-17,253		
5.300	5.317.452,658				

Comparant au 1er tableau, on note les particularités remarquables prévues par l'étude théorique, à savoir :

Analogie étroite de la fonction $E(n) \dots (= Y(x))$ dans les notations du § 5, 4, avec la sinusoïde.

- les coefficients a_i , de même parité, successifs, se déduisent les uns des autres par le module qui est imposé par les unités choisies (100 km) $(0,0157)^2 = 244.10^{-6}$
- en particulier, les coefficients pairs sont proportionnels à la distance des lignes de base (c'est-à-dire à $Y(x)$: coefficient d'ordre zéro).
- les différences impaires croissent du pôle vers l'équateur.

C'est ainsi que le coefficient du 4ème ordre (en module) est inférieur à la valeur trouvée à l'équateur ; on vérifie la proportionnalité entre ce coefficient et la distance des lignes de base :

Coefficient du 4ème ordre	(1) Module	(2) Distance à la ligne de base	Rapport (2 : 1)
A l'Equateur	$\frac{1}{4!} \cdot 45\text{mm}$	669 km	154/4!
A $\varphi = 45^\circ$	$\frac{1}{4!} \cdot 30\text{mm}$	472 km	156/4!

Le 3ème tableau est une illustration du théorème général, selon lequel la connaissance de la formule complexe $U(z)$ découle de la connaissance de l'image sur (U) d'une ligne droite du plan (z) . Des Tables numériques déjà citées (dont le titre, on le rappelle, est UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR GRID ZONE TO ZONE TRANSFORMATION TABLES), on a extrait une grille carrée de 200 km d'intervalle, centrée au point $N = 5\,000$ km, $E = 500$ km déjà introduit (point sur la ligne de base d'un fuseau à la latitude $\varphi = 45^\circ$).

Le résidu de la bipartition à 4 points se déduit des valeurs Δ_4 du tableau (2) ci-dessus en tenant compte du dispositif de la maille carrée (formule (4) du Chapitre II) et de l'augmentation de l'intervalle (de 100 à 200 km). On a :

(Tableau II)	Valeurs à prévoir du résidu de bipartition	Valeur trouvée d'après la grille
$\Delta_4(E) : + 25 \text{ mm}$	$- 64 \cdot \frac{25}{4!} = - 67 \text{ mm}$	$- 0,068$
$\Delta_4(N) : + 16 \text{ mm}$	$- 64 \cdot \frac{16}{4!} = - 42 \text{ mm}$	$- 0,045$

Le reste de la formule à 5 points pour l'obtention des points milieux de côtés est pratiquement nul (inférieur à 1mm, décimale de calcul). Ceci confirme que la connaissance des coordonnées des sommets du carré et de son centre, et l'emploi de la sous-tabulation et de l'interpolation complexe, déterminent entièrement la fonction considérée dans des champs très étendus.

Tableau III

GRILLE A INTERVALLE DE 200 KM POUR LE CHANGEMENT DE FUSEAU
MERCATOR TRANSVERSE (= 6°)

X en m.						Y en m.						
300 km		500		700								
5.200	756	819,753	956	520,831	1156	667,152	5.202	175,111	5217	499,395	5232	892,722
5.000	771	889,256	971	651,855	1171	875,076	5.002	669,908	5017	541,070	5032	481,520
4.800	786	497,894	986	322,325	1186	622,349	4.803	110,504	4817	513,504	4831	985,762

Reste de la formule de bipartition de maille carrée à 4 points

+ + + +

971.651,787
- ,068

5.017.541,025
- ,045

+ + + +

Reste de la formule à 5 points

+ + + +

+ +

+ + + +
986.322,324₄
- ,000₆
4.817.513,503₇
- ,000₃

VI. CONCLUSION D'ENSEMBLE SUR L'ÉTUDE DES DÉVELOPPEMENTS ANALYTIQUES REPRÉSENTANT LES TRANSPORTS CONFORMES GÉODÉSIQUES

Avec l'examen détaillé du problème de passage de fuseau à fuseau pour la projection de Mercator Transverse, l'on vient de compléter l'étude des principales transformations usuelles en Géodésie et Cartographie; on s'est particulièrement attaché à l'étude précise des coefficients du 4ème et du 5ème degré, et à montrer les bornes supérieures des autres coefficients; de manière à établir avec certitude la relation entre ces termes (du 4ème ou du 5ème degré...) et le reste complet de la série.

Le terme du 4ème degré qui fixe l'ordre de grandeur de l'erreur dans l'interpolation par moyenne en carré, possède les caractères généraux suivants :

- a) Sa variation est faible lorsque le centre de formule se déplace de quelques centaines de km dans la zone d'emploi de la transformation; cela est dû à la faiblesse de la dérivée 5ème de $U(z)$ ou encore à la relative petitesse du changement de centre ($\Delta \rho$) par rapport au rayon de convergence de la série (qui est toujours de plusieurs milliers de km).
- b) Pour préciser l'ordre de grandeur de ce terme du 4ème ordre, on distingue le cas des projections dont les lignes de base ne se rencontrent pas dans la zone, et pour lesquelles on peut donc parler d'une distance des deux lignes de base, et le cas de deux projections dont les lignes de base, au contraire, se coupent dans la région étudiée.

Pour le premier cas, ce terme du 4ème ordre croît sensiblement en fonction linéaire de la distance des courbes de base; pour le second cas, sa valeur dépend de la courbure de l'une d'elles (ou éventuellement de la différence des deux courbures géodésiques).

- c) Le problème du passage des coordonnées rectangulaires usuelles, ci-dessus, aux coordonnées de Mercator ordinaire, présente un grand intérêt pratique (... passage aux coordonnées géographiques, latitude, longitude). Il est délicat d'utiliser à son sujet les critères globaux ci-dessus, étant donné l'ordre de grandeur des distances à la courbe de base, l'expression précise des coefficients est donc indispensable à connaître dans chaque cas. On constate que, pour le passage à un système, soit Lambert, soit MT, pour une région donnée, à une latitude déterminée, l'effet de ce terme est sensiblement du même ordre de grandeur (il est plus grand dans le cas du MT que dans le cas du Lambert).

Les valeurs des restes de 4ème et 5ème ordre ayant été calculées pour tous ces problèmes, valeurs numériques à prendre pour les étendues habituelles des zones à calculer en Géodésie quelques centaines de Km, on arrive à la conclusion que, dans tous les cas pratiques, le calcul d'une table à double entrée de transformation de coordonnées conformes est réductible au mécanisme suivant :

- a) Détermination, par les formules définissant chaque projection (d'habitude, en fonction des coordonnées géographiques) d'un dispositif carré à 5 points (avec son centre) recouvrant toute la zone étudiée.
- b) Mise en œuvre des algorithmes d'interpolation carrée à 5 points et à 4 points pour obtenir une grille à maille carrée d'intervalle quelconque (déterminé par la précision du problème). L'algorithme de moyenne en carré pour la sous-tabulation est valable même pour de grandes mailles, mais il ne permet pas le calcul des points nouveaux sur le contour pour lequel on aura à employer les autres formules de l'interpolation à 5 points ou 4 points.

CHAPITRE V

COORDONNÉES HYPERBOLIQUES CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Ce type de coordonnées a pris rang récemment au nombre des méthodes les plus répandues de repérage ; un point y est défini par la différence de ses distances à deux stations, ce qui le situe sur une hyperbole ayant ces stations pour foyers. Selon la portée du système, le problème est à traiter sur le plan ou sur la sphère.

Pour ces divers cas, il est possible d'incorporer les hyperboles, planes ou sphériques, dans un système isotherme qui les admet comme courbes de coordonnées, la variable complexe associée à ce système offrant une relation analytique avec la variable complexe $z = x + i y$ du plan cartésien (cas du réseau bifocal plan) ou avec une variable complexe qui assure la représentation plane de la sphère ou du sphéroïde (par exemple $\mathcal{L} + i M$).

Il est dès lors possible de tirer bénéfice des méthodes de l'interpolation numérique complexe et la simplicité des formules à 4 ou 5 points.

On va montrer que l'on peut obtenir une excellente précision à partir des points de base relativement peu nombreux pour les deux cas : sphère ou plan.

I. SYSTÈME BIFOCAL PLAN

La fonction analytique $U = \cos z$ relie les coordonnées cartésiennes ($U = X + i Y$) et les coordonnées bifocales orthogonales ($z = x + i y$) lorsque la demi-distance des foyers est prise égale à l'unité.

On écrit en effet :

$$X + i Y = \cos (x + i y) = \cos x \cos i y - \sin x \sin i y$$

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{d'où} \quad X &= \cos x \operatorname{ch} y \\ Y &= \sin x \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

où l'on reconnaît immédiatement que les courbes $y = \text{constante}$ sont des ellipses ayant pour demi-axes respectivement

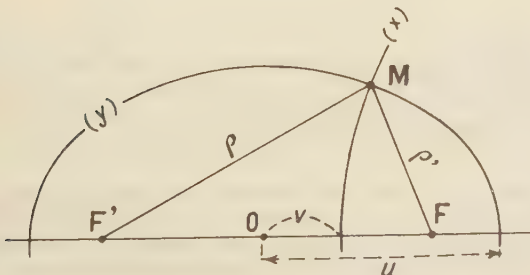
$$a = \operatorname{ch} y \quad \text{et} \quad b = \operatorname{sh} y \quad \text{et qui par conséquent vérifient l'équation " focale "}$$

$$a^2 - b^2 = c^2 = 1$$

De même, les courbes $x = \text{constante}$ sont des hyperboles de demi-axes $a' = \cos x$ et $b' = \sin x$ qui vérifient la même équation focale, selon

$$a'^2 + b'^2 = c'^2 = 1$$

Nous allons examiner plus en détail la disposition et les propriétés du système de coordonnées $x y$.



Reliant les paramètres hyperbolique x et elliptique y aux éléments géométriques de la figure en notant ρ et ρ' les distances du point M aux foyers respectifs F et F' et posant

$$\frac{\rho + \rho'}{2} = u \quad \quad \frac{\rho - \rho'}{2} = v$$

on a, d'après ce qui précède :

$$(2) \quad \sin x = \frac{\rho - \rho'}{2} \quad \quad \operatorname{ch} y = \frac{\rho + \rho'}{2}$$

ce qui, pour une position donnée de M dans le plan, définit x et y en grandeur et permet donc de calculer numériquement les paramètres x et y .

Le signe de ceux-ci résulte des équations initiales moyennant une convention auxiliaire. Celle-ci est prise de manière à ce que le repère vectoriel d I d J attaché à la variation dx dy, en d'autres termes, que la dérivée $\frac{dU}{dz}$ ne rencontre pas de ligne de discontinuité dans le plan, au franchissement de la droite "focale" FF' (ou "ligne de base").

Pour y parvenir, on admettra que le franchissement de la ligne de base entre F et F' correspond au changement de signe de la variable y, le paramètre x conservant une valeur fixe sur une branche d'hyperbole.

D'une manière analogue, le franchissement de la ligne de base au delà de F et F' correspondra pour x au franchissement des valeurs 0 ou π (ou $K\pi \dots$), le paramètre y restant fixe sur une même ellipse.

Cette convention répond à la condition de continuité demandée ci-dessus, mais on constate alors qu'un circuit embrassant l'un des foyers ramène en un même point X Y du plan :

les coordonnées y (> 0) et x (0 < x < $\frac{\pi}{2}$) (voir figure)

étant devenues - y et $2\pi - x$

On résumera les propriétés de la représentation en disant que l'ensemble des valeurs

$$0 < x < 2\pi \quad -\infty < y < +\infty$$

est nécessaire pour la description du plan cartésien X Y, mais qu'il fournit une description doublée du plan. Par ailleurs, la fonction représentative U (z) admet la période 2π pour x, évidente a priori.

Les particularités ci-dessus sont de celles qui justifient l'introduction des classiques surfaces de Riemann dans la théorie des fonctions analytiques, et la description qui vient d'être faite rappelle l'aspect de la surface de Riemann attachée à la fonction $U = \cos z$, et assurant la correspondance biunivoque des variables U et z.

La fonction $U = \cos z$ n'a pas de point singulier à distance finie, les points F F' ne sont que des zéros du module de la dérivée $\frac{dU}{dz}$, le développement en série de U (z) à partir d'un centre quelconque est donc convergent quel que soit Δz .

Enfin, la propriété des dérivées successives

$$(\cos z) = U = -U'' = +U^{(iv)} \quad \text{etc ...}$$

a une conséquence utile pour l'application de l'interpolation complexe et de la méthode de sous-tabulation par moyenne en carré. En effet, le reste de cette sous-tabulation étant proportionnel à la dérivée quatrième de la fonction U (z), l'on aperçoit immédiatement que l'erreur relative $\frac{\Delta U}{U}$, obtenue dans l'application de cet algorithme, pour une grille donnée, est constante pour cette fonction. Au point de vue pratique, ceci permet de resserrer une grille de base par la méthode de sous-interpolation à 4 points, en conservant une précision linéaire relative constante sur les coordonnées X et Y des nœuds du réseau; on peut même annuler presque complètement l'erreur venant du terme du 4ème degré, puisqu'on connaît à priori la relation de celui-ci avec la fonction U elle-même; la construction de points nouveaux par l'algorithme de moyenne en carré peut donc être accomplie avec une erreur tout à fait minime, pour les systèmes bifocaux plans.

Il est évident par ailleurs que l'utilisation du développement de Taylor pour construire des points quelconques U (z) au voisinage d'un centre quelconque, est particulièrement aisée pour cette fonction dont tous les coefficients du développement sont connus à partir des deux premiers.

Le problème de la construction et du tracé des réseaux bifocaux plans ne présente donc aucune difficulté pratique si on l'aborde par cette voie. L'on va examiner ci-après comment ces propriétés remarquables s'étendent au domaine de la sphère.

II. SYSTÈME SPHÉRIQUE

II. 1 — RÉSEAU HOMOFOCAL SPHÉRIQUE.

On connaît les propriétés essentielles des réseaux elliptiques hyperboliques sphériques (voir référence bibliographique à GUYOU et à ADAMS); ils offrent 4 foyers, disposés selon 2 couples antipodes l'un de l'autre, soit F φ F' φ' ; les courbes qui généralisent la propriété de l'ellipse (somme des distances constante) par rapport aux couples F φ F' φ' généralisent la propriété de l'hyperbole (différence des distances....) par rapport aux couples F F', $\varphi \varphi'$.

Il s'agit d'étudier la représentation cartographique du réseau sur une projection de la sphère, projection qui est imposée par le cas d'espèce apporté par la pratique. Mais nous pouvons ici tirer parti du traitement préalable qui a été fait du passage entre des projections conformes quelconques par les méthodes d'interpolation complexe, et par conséquent choisir pour la convenance de l'étude une projection particulière servant d'intermédiaire.

Les raisons de simplicité et de symétrie suggèrent par exemple :

- 1 - Projection de Mercator ayant le grand cercle des foyers FF' comme ligne de base.
- 2 - Projection de Mercator, transverse à la précédente, ayant un des grands cercles de symétrie de la figure comme ligne de base.
- 3 - Projection Stéréographique (ou Mercator) ayant le centre d'un couple de foyers comme pôle.

Pour ces diverses projections, le grand cercle de symétrie YY' (médiateur de FF', par exemple), est représenté par une droite et peut servir d'axe réel; dans le système des coordonnées isothermes bifocales, il a également cette propriété. L'étude des fonctions complexes recherchées découle donc de la connaissance de la relation liant la coordonnée elliptique du sommet P des ellipses (de foyers FF') avec la position de ce point P sur le grand cercle YY'.

On emprunte aux précédents auteurs la démonstration de cette relation, comme il suit. Le raisonnement théorique montre que les p et q (coordonnées isothermes sphériques focales) définissent sur la sphère une métrique dont le ds^2 est :

$$(4) \quad ds^2 = \sin \rho \cdot \sin \rho' (dp^2 + dq^2)$$

à rapprocher du ds^2 bifocal plan

$$(3) \quad ds^2 = \rho \rho' (dx^2 + dy^2)$$

Sur YY' on a $\rho = \rho' = \frac{\rho + \rho'}{2} = u$, et, d'autre part, par la trigonométrie sphérique :

$$\cos u = \cos \rho = \cos f \cdot \cos \varphi$$

d'où

$$ds = d\varphi = \sin \rho \cdot dp$$

$$(5) \quad dp = \frac{d\varphi}{\sin \rho} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 f \cos^2 \varphi}} =$$

$$(6) \quad \frac{du}{\cos f \sqrt{1 - \frac{\cos^2 u}{\cos^2 f}}} = \frac{du}{\sqrt{\cos^2 f - \cos^2 u}} = \frac{du}{\sqrt{\sin^2 u - \sin^2 f}}$$

II. 2 — PROPRIÉTÉS DÉCOULANT DE L'INTERPRÉTATION DES FORMULES DE L'ORDONNÉE ISOTHERME ELLIPTIQUE p.

On reconnaît selon (1) la forme de l'intégrale elliptique de 1ère espèce de LEGENDRE, tabulée sous la notation :

$$F(\theta, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}}$$

(7)

$$p = F\left(\frac{\pi}{2} - f; \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

On a donc affaire ici à $p = F\left(\frac{\pi}{2} - f; \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. D'où possibilité de calculer numériquement p en fonction de φ et vice versa, φ étant, on le rappelle, l'ordonnée en arc sphérique du point P par rapport à l'axe focal.

On note par ailleurs que, dans les notations de JACOBI

$$(8) \quad \frac{d\varphi}{dp} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} = dn \, p$$

la fonction dn étant une fonction elliptique classique dont les propriétés sont étudiées dans les traités spécialisés.

II. 3 — COMPARAISON AVEC LE PROBLÈME PLAN, ÉTUDE AU VOISINAGE DES FOYERS.

L'expression de la 2ème coordonnée isotherme elliptique sphérique q, aisément déduite de la 1ère par symétrie, étant

$$dq = \frac{dv}{\sqrt{\sin^2 f - \sin^2 v}}$$

on constate que dans le voisinage de $v = 0$, la coordonnée q est extrêmement voisine de

$$x = \text{Arc sin} \left(\frac{v}{\sin f} \right)$$

expression de la coordonnée y du réseau bifocal plan (où nous notons u' et v' pour distinguer des notations sphériques).

De même, la coordonnée p

$$p = \frac{du}{\sqrt{\sin^2 u - \sin^2 f}}$$

offre une ressemblance formelle avec la coordonnée homologue x dans le système bifocal plan

$$y = \int \frac{du'}{\sqrt{u'^2 - f^2}} = \text{Arg ch } (u') = \text{Arg ch } \frac{p+p'}{2f}$$

Ces deux expressions tendent à se confondre si $\sin u$ et $\sin f$ tendent vers zéro, sans que u' et f' eux-mêmes y tendent; c'est-à-dire si l'on suppose que le rayon de la sphère qui supporte le système homofocal augmente indéfiniment, les deux foyers principaux FF' et le système d'ellipses et d'hyperboles dans leur voisinage conservant les mêmes dimensions métriques : méthode naturelle de faire tendre le problème plan vers le problème sphérique. Il est donc normal de trouver, ce faisant, la vérification signalée ci-dessus

$$p \longrightarrow p' \qquad q \longrightarrow q'$$

II. 4 — ÉTUDE GÉNÉRALE DU PROBLÈME.

Étudions les propriétés de la relation (1) liant p et q , au point de vue de ses conséquences pour la cartographie et pour l'interpolation complexe. On s'intéresse plus particulièrement à connaître l'allure des dérivées successives de toute coordonnée complexe sphérique associée à U , considérée en fonction de la variable complexe elliptique $z = p + iq$ et il est utile, dans ce but, d'examiner d'abord les propriétés générales qualitatives des cartes construites sur le canevas homofocal sphérique elliptique; les cartes qui ont été proposées et construites par GUYOU en France et PEIRCE en Amérique fournissent une illustration concrète des propriétés des fonctions elliptiques.

Ces deux planisphères elliptiques sont basées sur des systèmes focaux équilatères, c'est-à-dire que les distances des foyers y sont égales à :

$$FF' = \Phi \Phi' = F' \Phi = \Phi' F = \frac{\pi}{2}$$

EXAMEN DU PLANISPHERE ELLIPTIQUE DE PEIRCE

L'étude de la disposition des méridiens et parallèles dans la carte de PEIRCE s'insère exactement dans le cadre du problème énoncé au 1° ci-dessus : étude en fonction de $p + iq$, de la variable de Mercator $\mathcal{L} + iM$ appuyée sur le grand cercle passant par les foyers; la seule particularisation étant ici les valeurs spéciales des axes focaux FF' , $F' \Phi$, etc... $= \frac{\pi}{2}$.

On constate que la carte illustre les propriétés des fonctions elliptiques de JACOBI dans le cas où les deux périodes sont égales.

Ces périodes sont définies par la distance sur la carte de deux images successives d'un même pôle terrestre : sur la reproduction ci-jointe du planisphère de PEIRCE, on voit que ces deux périodes, égales en module, sont les diagonales du carré dans lequel est contenue l'image complète du globe.

Les images des 4 foyers sont des zéros de la dérivée de U par rapport à $p + iq$, c'est-à-dire, au point de vue cartographique, des points d'échelle nulle. Ce sont, par suite, des centres de symétrie (propriété classique des minimum ou maximum des fonctions périodiques). Au voisinage de ces foyers, la relation

$$U = (\mathcal{L} + iM) = f(p + iq) = f(z)$$

prend la forme

$$U = k \cdot z^2$$

puisque le demi-plan de la variable z suffit à cartographier l'ensemble du plan pour la variable U : effectivement, le réseau des courbes représentant $\mathcal{L} + iM$ affecte ici la disposition caractéristique d'hyperboles équilatères orthogonales attachée à cette fonction complexe élémentaire.

La variable complexe $\mathcal{L} + iM$ a en évidence quatre points singuliers logarithmiques par "cellule", ou "parallélogramme de période" (les images des pôles Nord et Sud) : l'aspect de la carte de PEIRCE au voisinage des pôles tend vers l'aspect de la carte Stéréographique polaire, dont la variable complexe $S = x + iy$ est, comme on sait, liée à la variable de Mercator par la relation logarithmique

$$(\mathcal{L} + iM) = \log S$$

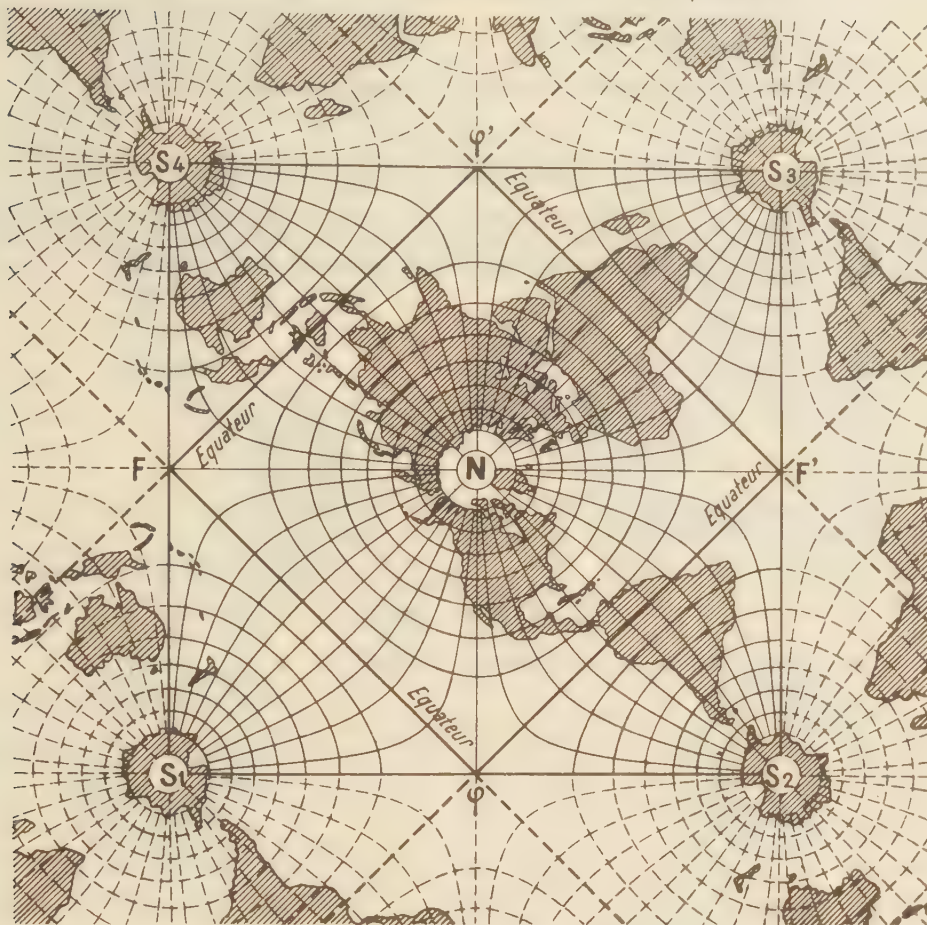
Il en résulte que les propriétés de la relation entre

$$z = (p + iq) \quad \text{et} \quad (\mathcal{L} + iM) = U$$

tendent, au voisinage des pôles, à se rapprocher de plus en plus des propriétés relatives au passage de la projection stéréographique à la projection de Mercator; au point de vue pratique, cela signifie que l'estimation de

Planisphère de Peirce

Image de la sphère entière dans un carré.
Points critiques équidistants sur l'équateur — Double périodicité.



l'ordre de grandeur des termes successifs du développement en série dans un champ Δz donné dépend du rapport $\frac{|\Delta z|}{|OP|}$ (où P est le point image du pôle), selon les formules élémentaires du développement au voisinage d'un pôle. C'est ce qui sera fait dans l'exemple numérique ci-dessous en fin de chapitre.

D'une manière plus précise, on reconnaît dans la dérivée

$$\frac{dU}{dz} = d(\mathcal{L} + iM) / d(p + iq)$$

une fonction elliptique, doublement périodique, dont les pôles sont les images des pôles terrestres Nord et Sud, et les zéros, les images des foyers, et dont les résidus pour chaque pôle sont égaux en valeur absolue (de signes opposés pour les pôles Nord ou Sud)(*). Une telle fonction est représentable par un développement infini du type

$$\sum \sum_{ij} \left(\frac{1}{u - w_{ij}} + \frac{1}{w'_{ij}} \right)_N - \left(\frac{1}{u - w'_{ij}} + \frac{1}{w_{ij}} \right)_S$$

et la théorie montre que ce développement est absolument convergent, et représente effectivement la fonction $U(z)$.

On a donc l'assurance que les propriétés numériques du développement en série, représentant $U(z)$ autour d'un centre quelconque 0, sont définies par le rayon de convergence (distance au point le plus proche), et l'on aurait le moyen de faire le calcul précis des coefficients successifs en tenant compte des quelques autres points ω voisins.

(*) notées respectivement w_{ij} et w'_{ij}

Les considérations précédentes s'appliquent aux cartes elliptiques associées aux systèmes focaux ren-contrés en navigation aérienne, et dont la distance focale est de l'ordre de quelque dix degrés en plus. Pour de tels systèmes, la valeur relative des périodes se modifie

$$K = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{du}{\sqrt{\sin^2 u - \sin^2 f}} \quad K' = \int_f^{+\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{\sin^2 f - \sin^2 v}}$$

les cellules deviennent oblongues et les images des pôles s'éloignent de la ligne de base.

II. 5 — ÉTUDE ANALYTIQUE DIRECTE LA FONCTION ($\mathcal{L} + iM$) FONCTION DE ($p+iq$).

Partant de l'expression (1) qui relie la coordonnée sphérique φ à la coordonnée elliptique p sur l'axe de symétrie de la figure (médiatrice des images des foyers FF'), et substituant la variable de Mercator ($\mathcal{L}$) à la place de φ , on obtient la relation $U(z)$ en vue de l'étude de ses dérivées successives :

$$\begin{aligned} dp &= \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 f \cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{d\varphi / \cos \varphi}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \cos^2 f}} = \int \frac{d\mathcal{L}}{\sqrt{\text{ch}^2 \mathcal{L} - \cos^2 f}} \end{aligned}$$

expression que nous écrirons autrement pour pouvoir mettre en évidence la variable et la fonction et pouvoir utiliser le symbolisme classique des dérivées

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\text{ch}^2 y - \cos^2 f}}$$

Poursuivant les dérivations à partir de cette forme, il vient :

Par comparaison avec la fonction

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\text{ch}^2 y - \cos^2 f}}$$

$$y = -\log (x - x_0) = \log \frac{1}{x - x_0}$$

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \quad g = \sqrt{\text{ch}^2 y - \cos^2 f}$$

$$y' = \frac{-1}{x - x_0} = -e^{-y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = gg' = \text{sh } y \text{ ch } y = \frac{1}{2} \text{sh } 2y \quad \text{pour } y \text{ petit}$$

$$y'' = \frac{+1}{x^2} = +y'^2$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \text{ch } 2y g(y) = \text{ch } 2y y'$$

$$y''' = \frac{-2}{x^3} = -2(y')^3$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 2 \text{sh } 2y y'^2 + \text{ch } 2y y'' = \frac{2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} y' + \left(\frac{2}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) y''$$

On voit ci-dessus que lorsque y devient grand, c'est-à-dire au voisinage des pôles Nord et Sud, on a :

$$y' = g \longrightarrow \text{ch } y = \left(\frac{1}{\cos \varphi} \right) \longrightarrow e^y$$

approximations qui, sur l'axe réel, sont des majorations et dépendent des grandeurs respectives des quantités

$$\frac{1}{\cos \varphi} \quad :: \quad \cos f \quad :: \quad 1$$

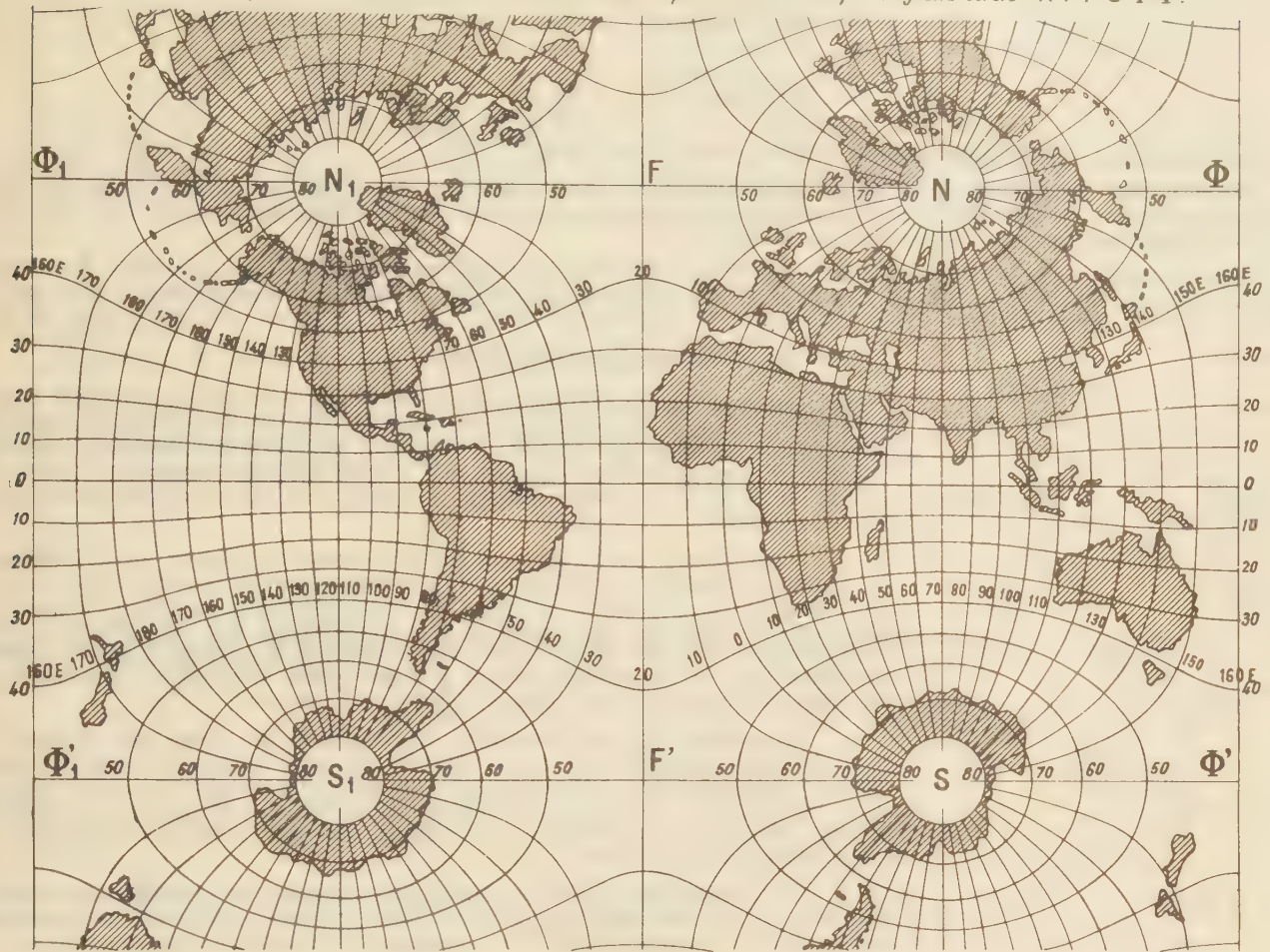
De là, il découle :

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2} \text{sh } 2y = \text{sh } y \text{ ch } y = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \longrightarrow y'^2 \\ y''' &= \text{ch } 2y y' \longrightarrow \text{sh } 2y y' \longrightarrow 2y'^3 \\ y^{IV} &= y'^2 (2 \text{sh } 2y + \text{ch } 2y) \longrightarrow 6y'^4 \end{aligned}$$

toutes approximations qui, comme la première, dépendent de l'ordre de grandeur respectif de $\text{ch } y$ - c.a.d. $\frac{1}{\cos \varphi}$ par rapport à $\cos f$ et à l'unité, et qui rendent compte de la proximité du développement analytique de $U(\mathcal{L} + iM) = U(p + iq)$ par rapport à celui de la fonction logarithme.

Planisphère de Guyou

Définition identique à celle de Peirce mais le rôle de l'équateur étant tenu par le grand cercle $NFF'S\Phi'\Phi$.



II. 6 — TRANSITION DE LA CARTE DE PEIRCE AVEC CELLE DE MERCATOR ; EXAMEN DU CANEVAS DE LA CARTE DE GUYOU ; FONCTION ASSOCIÉE : $A_m(u)$ (NOTATION DE JACOBI).

Si $f \rightarrow 0$, la carte devient le planisphère habituel de Mercator qui est simplement périodique et est composé d'une succession indéfinie de bandes parallèles; on peut contrôler ceci en se reportant à l'équation de base (1)

$$p = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 f \cos^2 \varphi}}$$

qui tend vers $p = \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ lorsque f tend vers zéro, résultat que l'on retrouve encore par géométrie directe en constatant que, lorsque les foyers tendent à se confondre, les lignes coordonnées (hyperboles et ellipses géodésiques) tendent vers le système des méridiens et parallèles ayant le foyer double comme pôle.

Cette remarque conduirait à adopter comme projection intermédiaire pour cartographier un réseau d'ellipses ou hyperboles sphériques, la projection stéréographique admettant le milieu des foyers comme pôle; en d'autres termes, cela revient à dire qu'on repèrera les points, de cotes p et q données, par leurs coordonnées polaires sphériques rapportées au milieu des foyers FF' , au lieu de les repérer par leurs coordonnées sphériques orthogonales, basées sur l'axe focal.

Enfin, si l'on choisit comme système de référence celui des coordonnées sphériques orthogonales ayant pour ligne de base le grand cercle de symétrie $(Y'Y)$, médiateur de l'axe focal, ceci revient à considérer φ lui-même (et non plus $\mathcal{L}(\varphi)$) comme partie réelle de la variable complexe U . La fonction $U(z)$ associée au problème est donc directement selon l'équation (1)

$$(8) \quad z = \int \frac{dU}{\sqrt{1 - \cos^2 f \cos^2 U}}$$

qu'on peut écrire, mettant en évidence la fonction et la variable

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \cos^2 f \cos^2 y}} = \text{Am} \left(\frac{\pi}{2} - y ; \frac{\pi}{2} - f \right)$$

$$\text{ou } \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \cos^2 f \cos^2 y} = \text{dn} \left(\frac{\pi}{2} - f ; \frac{\pi}{2} - x \right)$$

en faisant appel aux notations classiques des fonctions de JACOBI.

L'étude des propriétés de la carte ainsi définie (ce n'est autre que le planisphère elliptique de GUYOU) s'effectue aisément en utilisant les connaissances classiques acquises sur la fonction : périodicité sur l'axe réel, développement en série trigonométrique, etc...

Les courbes du canevas de la carte de GUYOU coïncident avec celles de la carte de la fonction $\varphi = \text{Am } u$ qui est donnée par JAHNKE et EMDE, à la page 91 de leur ouvrage, Tables of functions with formulæ and curves (1945)

CONSEQUENCES PRATIQUES

Les remarques et les calculs ci-dessus permettent en un point quelconque du champ $p+iq$ d'évaluer la grandeur des coefficients successifs du développement en série, et par conséquent, de connaître les conditions de validité d'application des algorithmes d'interpolation complexe à 4 ou 5 points, lorsque l'on adopte comme projection le système Mercator basé sur l'axe focal.

A partir de 4 ou 5 points de base, formant un élément de grille dans le système isotherme elliptique, et correspondant à la connaissance des coordonnées (... Mercator ...) de 4 ou 5 points situés sur des ellipses et hyperboles données, ces algorithmes fournissent les coordonnées des points intermédiaires situés aux nœuds d'ordres successifs dans la grille. On obtient ainsi une densité aussi grande qu'on le désire, de points de coordonnées connues, sur chaque ellipse ou hyperbole.

La méthode est, en définitive, une méthode de tracé des ellipses et hyperboles par points sur une carte conforme de la sphère, carte que l'on a d'abord supposé être tracée dans une projection particulière, bâtie sur la ligne des foyers, mais qui pourra aussi bien être une projection cartographique quelconque, convenant à la région étudiée (c'est-à-dire ayant sa ligne de base à proximité).

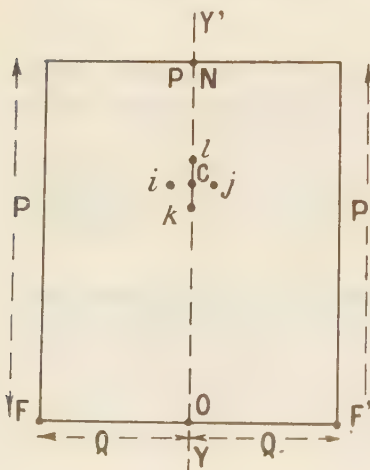
L'essentiel est qu'il faut, au départ, adopter le système des coordonnées elliptiques isothermes sphériques comme système de référence, pour vérifier les propriétés intéressantes de l'interpolation complexe.

II. 7 — PRÉSENTATION D'EXEMPLE NUMÉRIQUE.

Système focal. Distance des foyers $F F' = 2 f = 10^\circ$

Demi-périodes des intégrales elliptiques utilisées

Schéma de la carte



$$P = F(\varphi = 90^\circ ; 90^\circ - 5^\circ) = \int_0^{90} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 f \cos^2 \varphi}} = 3.83174 \ 2000$$

(φ = "latitude elliptique")

$$Q = F(\varphi = 90^\circ ; 5^\circ) = \int_0^{90} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 f \sin^2 \varphi}} = 1 \ 57379 \ 2131$$

(φ = "longitude elliptique")

Élément de grille étudiée (5 points en carré avec centre)

Centre C, $p = 2.51119 \ 899$ ($\varphi = 8^\circ \ 39'59.893$)

Amplitude $\Delta p, \Delta q = 0.13888 \ 770$ (correspond à $\Delta \varphi \approx 80^\circ$)

Distance relative au pôle Nord, le plus proche

$$\frac{|\Delta p|}{|C P|} = \frac{0.14}{1.32} \approx 0.105$$

$$\text{au pôle Sud } \frac{|\Delta p|}{|C P|} = \frac{0.14}{6.33} \approx 0.02$$

$\mathcal{L}$ 610	774
$\Delta \mathcal{L}$ 89	185
$\mathcal{L}$ 516 490	521 589
M = 83 504	M = 0
$\Delta \mathcal{L}$ 78	950
$\mathcal{L}$ 442	639

$$\begin{array}{c|c} 526 & 706 \\ \hline -516 & 490 \end{array} ; \begin{array}{c|c} -521 & 598_{25} \\ \hline & \end{array} \quad (521 \ 589)$$

Calcul des coefficients au point central par application des formules (1) $\rightarrow$ (9) etc.. (page 23)

En posant $X = \mathcal{L}$ $Y = M$

(1) 84 067 ₅	(3) = 0	(5) + 5.117 ₅	(7) = 0
(2) 83 504	(4) = 0	(6) - 5.099	(8) = 0
(9) $\alpha = 83 \ 785_{75}$	$\gamma = + 5.108_{25}$	$\varepsilon = + 0.281_{75}$	$\lambda = + 0.009_{25}$
$\beta = 0$	$\delta = 0$	$\xi = 0$	$\mu = 0$

NOTA : L'étude d'une table numérique de $\mathcal{L}(x)$ sur l'axe de symétrie donne les valeurs suivantes des coefficients jusqu'au rang 5

$\alpha = 83 \ 784$	$\gamma = + 5 \ 108$	$\varepsilon = 0.284$	$\lambda = .009_7$	$\nu = 46 \ 10^{-4}$
---------------------	----------------------	-----------------------	--------------------	----------------------

en excellent accord avec les précédentes

Rapport des coefficients successifs	1 : 16,4	1 : 18,2	1 : 29	1 : 21
Comparaison à la série logarithme	$\frac{1}{2} \cdot 0,105 =$	$\frac{2}{3} \cdot 0,105 =$	$\frac{3}{4} \cdot 0,105 =$	$\frac{4}{5} \cdot 0,105 =$
pour $\frac{\Delta z}{R} = 0,105$	1 : 19	1 : 16 ₅	1 : 14	1 : 13

On constate que la convergence est très voisine de celle de la série logarithmique correspondant au pôle le plus proche.

L'erreur de l'algorithme de moyenne en carré est de l'ordre de 0'01 qui correspond à une erreur linéaire négligeable pour l'utilisation de la méthode au dessin d'un réseau hyperbolique de navigation.

CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE RELATION AVEC LES TRAVAUX DE L'ÉCOLE DE SOUTHWELL SUR LA MÉTHODE DE RELAXATION

SOUTHWELL a fait dans divers écrits successifs, une étude systématique de l'application de la méthode d'approximation successive à la construction de solutions de l'équation de LAPLACE, en utilisant précisément l'algorithme de moyenne en carré que nous avons ici étudié en détail. D'autres auteurs ont repris ses travaux en les appliquant à des cas techniques précis de problème du contour, et ont fait valoir les propriétés convergentes de cette méthode et sa commodité, dans l'emploi en liaison avec les équipements mathématiques modernes :

équipements à cartes perforées, associés ou non à des machines électroniques

Il est clair que cette méthode, utilisée par SOUTHWELL et d'autres, pourrait, dans des conditions d'équipement analogues, être appliquée avec succès aux problèmes qui nous ont occupés ici, le bénéfice essentiel à en attendre étant la simplicité plus grande des calculs de base lorsqu'ils sont appliqués uniquement sur certaines lignes particulières formant contour.

Dans le présent travail, on a admis au départ que l'on connaissait des valeurs de base, même très peu nombreuses, mais réparties régulièrement dans la région étudiée, ces valeurs de base étant calculées par des formules directes. En effet, dans le contexte d'un calcul numérique conventionnel exécuté avec l'aide de machines ordinaires (et non point par un automate calculeur), il n'est pas dispendieux, au point de vue travail, de rechercher ainsi quelques valeurs de base très précises en utilisant un enchaînement de calculs explicites traduisant la définition brute de la correspondance conforme étudiée.

L'interpolation complexe, ou les formules dérivant de l'intégrale de CAUCHY, étudiées dans la première partie du mémoire, permettraient, du reste, de calculer une valeur quelconque dans le plan complexe, à partir des valeurs connues sur une ligne de contour; mais il est douteux que cette voie, séduisante en principe par sa simplicité et sa puissance, puisse réellement donner de l'avantage dans les calculs numériques.

Le présent mémoire s'inscrit, on le voit, dans une conjoncture mathématique particulière, antérieure à la mise en service courant des machines automatiques ultra-rapides à programme universel, qui assimileront des problèmes tels que ceux-ci (transformations de coordonnées géodésiques) ou d'autres questions impliquant l'équation de LAPLACE $\Delta u = 0$, à une résolution du problème de contour par approximations successives, l'algorithme de LIEBMANN étant l'opération arithmétique élémentaire employée.

Nous avons cherché à montrer ici que dans les conditions normales de travail des calculateurs des bureaux de calculs d'aujourd'hui, le même algorithme est susceptible de rendre les plus grands services dans l'étude des fonctions complexes à double entrée. Mais sa mise en œuvre doit se faire précéder d'une étude théorique soignée, généralement aisée, des caractères de la fonction étudiée, en cherchant partout où cela se peut, à utiliser les propriétés géométriques connues par avance à son sujet, et, pour employer un langage figuratif, en cherchant à déterminer jusqu'à quel degré chacune de ces opérations se rapproche de l'opération "identique".

INDEX DES FORMULES POUR LA DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE III

§ 1 - Description récapitulative des projections considérées

	Observations	Page
(1) $\mathcal{L}(\varphi) = \text{Log tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$		53
(1 bis) $\mathcal{L}(\varphi) = \int \frac{\cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$		54
(2) $R(\varphi) = R_0 \left[\frac{S(\varphi)}{S(\varphi_0)} \right]^n$	Stéréog $\rightarrow$ Lambert	54
(3) $U = R_0' \left(\frac{z}{R} \right)^{1+a}$	$L^t \rightarrow L^t$	55
(4) $U = -\frac{1}{n} \text{Log } z/R$	$L^t \rightarrow$ Mercator	55
(5) $\left(-\frac{dR}{ds} \right) = +\frac{1}{2!} C \Delta s^2 + \frac{1}{3!} C \Gamma_0 \Delta s^3 + \dots$	Formule d'Allard, projection Lambert	55
(6) $\mathcal{L}(\varphi) = \text{Gud}^{-1} \varphi = \text{Log tg} (\pi/4 + \varphi/2)$		55
(7) $\begin{cases} x = \text{Arg tg} (\sin \lambda \cos \varphi) \\ y = -\text{Arc tg} [\cotg \varphi \cos \lambda] + \pi/2 \end{cases}$	Passage géographique $\rightarrow$ Merc ^r Transverse	55

§ 2 - Méthodes générales d'obtention des formules de passage

(8) $U(z_0 + \Delta z) = U_0 + \alpha \Delta z + \beta \Delta z^2 + \dots$	développement analytique, à centre quelconque, exprimant un changement de système de coordonnées conformes	56
(9) $\begin{cases} X = X_0 + a x + b x^2 + c x^3 \\ Y = Y_0 + a'x + b'x^2 + c'x^3 \end{cases}$	On connaît l'image sur U d'une ligne droite du plan z : formule de passage $z \rightarrow U$	57
(10) $U = (X + iY) = (X_0 + iY_0) + (a + ia')(x + iy) + \dots$		57
(11) $ds^2 = \frac{1}{m^2} (dX^2 + dY^2)$	$m(XY)$ = échelle (représentation conforme)	58
(12) $\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{\partial \log m}{\partial x} (x'^2 - y'^2) + \frac{\partial \log m}{\partial y} 2 x' y'$	Système différentiel des géodésiques (représentation conforme)	58
$\frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{\partial \log m}{\partial y} (x'^2 - y'^2) + \frac{\partial \log m}{\partial x} 2 x' y'$		
(13) $\frac{d^2 z}{ds^2} = \alpha \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 ; \dots \alpha = \frac{\partial \log m}{\partial x} - i \frac{\partial \log m}{\partial y}$		58

$$(14) \quad m' \equiv m'(x, y) \quad m'' \equiv m''(X, Y)$$

Expressions d'échelles de 2
représentations conformes
z et U $\begin{matrix} z = (x, y) \\ U = (X, Y) \end{matrix}$

58

$$(15) \quad \alpha = \frac{\delta \log m'}{\delta x} - \frac{\delta \log m''}{\delta x} - i \left(\frac{\delta \log m'}{\delta y} - \frac{\delta \log m''}{\delta y} \right)$$

58

CHAPITRE IV

L^t Mercator

$$(1) \quad U = U_0 + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{\Delta z}{R} \right)$$

61

$$(2) \quad U_4 : 2 \text{ cm} / 100 \text{ km à } 45^\circ$$

62

$$(3) \quad U_0 + \Delta U = 1/\sin \varphi_0 \cdot \log (\cotg \varphi_0 + \Delta z) = \\ = 1/\sin \varphi (t \Delta z + \frac{t^2}{2} \Delta z^2 + \dots + \frac{t^p}{p} \Delta z^p) \\ \text{tg } \varphi = t$$

62

L^t en L^t

$$(4) \quad U_0 + \Delta U = U_0 \left(1 + \frac{\Delta z}{R_0} \right)^{\frac{n}{n'}}$$

62

$$(5) \quad U_4 = 2 \text{ mm} / 100 \text{ km}$$

$$\varphi_0 - \varphi'_0 = 3G$$

63

$$(6) \quad \left. \begin{matrix} U_5 \\ U_5 \end{matrix} \right\} = U_4 \begin{matrix} \nearrow 60 \cdot 2 = 120 \\ \searrow \frac{1}{60} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{100} \end{matrix}$$

$$\varphi \text{ moyen} = 45^\circ$$

63

valable à φ moyen 45°

$$\varphi_0 - \varphi'_0 = \text{arbitraire, petit}$$

$$(7) \quad U_4 \simeq \frac{1}{12} \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{\sin \varphi_1} \frac{1}{\text{tg}^3 \varphi_1} \Delta z^4$$

formule générale en unité
radian, valable pour $n = n' (1 + \varepsilon)$

63

Merc^r Transverse en L^t

$$(8) \quad \Delta X = \Delta x + \frac{1}{3!} \Delta^3 x + \frac{1}{4!} t \Delta^4 x + \frac{5+3t^2}{5!} \Delta^5 x^5 \\ + \dots \dots (\Delta x^7) + \dots$$

($t = \text{tg } \varphi$)
Formule "aller"

63

$$(9) \quad \Delta x = \Delta X - \frac{1}{3!} \Delta X^3 - \frac{1}{4!} t \Delta X^4 \dots (\Delta X^7) +$$

Formule "retour"

64

$$(10) \quad U_4 = 1,6 \text{ cm}$$

à la latitude 45°

64

$$(11) \quad U_5 = U_4 \cdot 1,6 \cdot \frac{1}{60} \neq 0 \text{ mm}, 4$$

- d° -

65

Merc^r Transverse à Merc^r

$$(12) \quad \Delta X = \Delta x + \frac{1}{3!} \Delta x^3 + \frac{1}{4!} \Delta x^5 + \frac{61}{7!} \Delta x^7 + \dots$$

origine à l'équateur

65

$$(13) \quad \Delta X = \frac{1}{\cos \varphi} \left\{ \Delta x + t \frac{\Delta x^2}{2!} + (1 - 2t^2) \frac{\Delta x^3}{3!} \dots \right.$$

origine à la latitude φ

65

$$\dots + t (5 + 6t^2) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots \dots (\Delta x^6)$$

(14)	$U_4 = 0''01 = 3 \text{ cm}/100 \text{ km}$	origine à la latitude 45°	66
(15)	$\frac{U_3}{U_4} = \frac{U_4}{U_5} = \frac{50}{1}$	- d° -	66
(16)	Formules de composition		66
	X(x) ((c))	X(u) ((b))	u(x) ((a))
(16 bis)	Formules de composition des dérivées		67
	((γ))	((β))	((α))

Mercator → à Merc^r Transverse

(13 bis)	$\Delta x = \cos \varphi \left\{ \Delta X - \cos \varphi t \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} - \right.$ $\left. - \cos^2 \varphi (-1+t^2) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + (\Delta x^5) + \right\}$	68
----------	---	----

Mercator Transverse, fuseaux adjacents

(17)	$Y = \frac{1}{\cos \lambda_0} \left\{ y + \frac{t}{2} y^2 + \frac{t^2}{3} y^3 + \frac{t}{24} + \frac{t^3}{4} y^4 \dots \right.$ $\left. \dots + \frac{t^2}{15} + \frac{t^4}{5} y^5 + \dots \right\}$	Formule de passage à l'Equateur (centre ω)	70
(18)	$U_4 = 2\text{mm}$	à l'Equateur	71

Formules explicites de la représentation paramétrique du méridien central d'un des fuseaux, dans les coordonnées de l'autre

(19) ₍₁₎	$\text{tg } X = \cos \lambda_0 \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \lambda_0 \text{tg } x =$ $= \cos \lambda_0 \text{tg} (x_\omega + \Delta x)$	72
(2) ₍₂₎	$\text{th } Y = \sin \lambda \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \lambda_0 \sin x =$ $= \sin \lambda_0 \sin (x_\omega + \Delta x) = \sin u$	72

(20)	$X = x - \alpha^2 \frac{\sin 2x}{1} + (\alpha^2)^2 \frac{\sin 4x}{2} - (\alpha^2)^3 \frac{\sin 6x}{3}$ $X' = 1 + 2 \alpha^2 \left[-\cos 2x - \alpha^2 \cos 4x - (\alpha^2) \cos 6x \right]$ $X'' \dots X''' \dots X^{IV} = -16 \alpha^2 \sin 2x$	Utilisation du développement de 19 ₍₁₎ en série de Fourier	73
------	---	--	----

(21)	$\frac{dX}{dx} = \cos \lambda_0 (\cos^2 u)^{-1} \quad \cos^2 u = 1 - \sin^2 \lambda_0 \sin^2 x$ $\frac{d^2 X}{dx^2} = \cos \lambda_0 \sin^2 \lambda_0 (\cos^2 u)^{-2} \sin 2x$ etc	Formules introduisant la distance u, en arc, à la ligne de base	73
------	---	---	----

(22)	$X = \cos \lambda_0 \left[x + \sin^2 \lambda_0 \frac{x^3}{3} - \sin^2 \lambda_0 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \lambda_0 \right) \frac{x^5}{5} + \dots \right]$ au pôle $X' = \sec \lambda_0 \left[x' - \text{tg}^2 \lambda_0 \frac{x'^3}{3} + \text{tg}^2 \lambda_0 \left(\frac{1}{3} + \text{tg}^2 \lambda_0 \right) \frac{x'^5}{5} + \dots \right]$ à l'équateur	74
------	--	----

$$\text{Valeur maximum de } \frac{d^4 X}{dx^4} \text{ à } 45^\circ = \frac{2}{3} \cdot \left(2 \operatorname{tg} \frac{\lambda_0}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} \quad \text{à } \varphi = 45^\circ$$

Résultat qualitatif pour $Y(x)$:

la fonction est sensiblement $\sin \lambda_0 \sin x$
la courbe est sensiblement la sinusoïde

Assimilation au problème général du tracé d'une ligne géodésique sur une projection

$$(23) \quad \frac{d^2 x}{ds^2} = a (X'^2 - Y'^2) - b (2 X' Y') \quad 75$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -b (X'^2 - Y'^2) + a (2 X' Y')$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{dm}{mdx} & u &= \frac{dx}{mds} \\ b &= \frac{dm}{mdy} & v &= \frac{dy}{mds} \end{aligned} \right\} \frac{\text{cosinus}}{\text{directeur}}$$

$$(24) \quad d^2 z/ds^2 = (dz/ds)^2 \alpha \quad 75$$

$$(25) \quad d^3 z/ds^3 = (dz/ds)^2 \left(\frac{d\alpha}{ds} + 2 \alpha^2 dz/ds \right) \quad 76$$

$$d^4 z/ds^4 = (dz/ds)^2 \left(\frac{d^2 \alpha}{ds^2} + 6 \frac{d\alpha}{ds} \alpha dz/ds + 6 \alpha^3 (dz/ds)^2 \right)$$

$$d^5 z/ds^5 = \text{etc}$$

$$(26) \quad dz/ds = \frac{1}{\cos \phi} (u + iv) \quad \begin{array}{l} \text{Résultats précédents, explicités} \\ \text{en fonction des quantités } u, v \\ \text{cosinus directeurs de la ligne} \\ \text{géodésique} \end{array} \quad 76$$

$$d^2 z/ds^2 = \frac{1}{\cos \phi} \left[-i \operatorname{tg} \phi (u + iv)^2 \right]$$

majoré par $\operatorname{tg} \phi$

$$d^3 z/ds^3 = \frac{1}{\cos \phi} \left[-i v (u + iv)^2 + 2 \operatorname{tg}^2 \phi (u + iv)^3 \right]$$

majoré par $(1 + 2 t^2)$

$$d^4 z/ds^4 = \frac{-i}{\cos \phi} \left[-\operatorname{tg} \phi (u + iv)^2 - \right.$$

ϕ distance en arc à la ligne de base

$$\left. -6 i \operatorname{tg} \phi v (u + iv)^3 - 6 \operatorname{tg}^3 \phi (u + iv)^4 \right]$$

majoré par $(5t + 6 t^3)$

$$(27) \quad d^4 z/ds^4 \simeq \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos \phi} \left[-8 v + i \right] \quad 77$$

$$(28) \quad U_4 \text{ à l'équateur} = 2\text{mm}/100\text{km} \quad (\text{pour } \lambda_0 = 6^\circ) \quad \begin{array}{l} \text{Résultats numériques pour les} \\ \text{termes du 4ème et 5ème ordre} \\ \text{(problème du changement de} \\ \text{fuseau)} \end{array} \quad 79$$

$U_5 < 1 \text{ mm}$

$$(29) \quad \text{Tableau des diverses expressions trouvées pour } U_{\frac{IV}{x}} \text{ et } U_{\frac{V}{x}} \text{ dans le problème du changement de fuseau} \quad 80$$

Réseau bifocal plan

(1)	$X = \cos x \operatorname{ch} y$ $Y = \sin x \operatorname{sh} y$	Représentation paramétrique du plan U	83
(2)	$\sin x = \frac{\rho - \rho'}{2}$ $\operatorname{ch} y = \frac{\rho + \rho'}{2}$ (convention de signe)	Obtention des coordonnées paramétriques d'un point donné du plan U	83
(3)	$ds^2 = \rho \rho' (dx^2 + dy^2)$	Réseau focal plan	85
(4)	$ds^2 = \sin \rho \sin \rho' (dp^2 + dq^2)$	Réseau focal sphérique	85
(5)	$dp = \frac{d\varphi}{\sin \rho} = \frac{d\varphi}{(1 - \cos^2 f \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$		85
(6)	$dp = \frac{du}{(\cos^2 f - \cos^2 u)^{\frac{1}{2}}} = \frac{du}{(\sin^2 u - \sin^2 f)^{\frac{1}{2}}}$		85
(7)	$p = F\left(\frac{\pi}{2} - f ; \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$	Identification de p avec l'intégrale elliptique de 2ème espèce de Legendre	85
(8)	$\frac{d\varphi}{dp} = \operatorname{dn} p$	dn , notation de JACOBI	85
	$z = \int \frac{dU}{\sqrt{1 - \cos^2 f \cos^2 U}} = \operatorname{Am}\left(\frac{\pi}{2} - U ; \frac{\pi}{2} - f\right)$	Identification du planisphère de Guyou avec la carte de la fonction Am de Jacobi	89

Application de la formule de moyenne en carré pour un système sphérique focal,
distance des foyers $10'' = 600'$

Figure en croix, branches de 84' environ

Point moyen à 522' du centre

Erreur : 0'01 (20 m environ)

TABLE DES MATIÈRES

I^{re} Partie : ÉTUDE GÉNÉRALE DE L'INTERPOLATION COMPLEXE

BIBLIOGRAPHIE	3
CHAPITRE I	5
Introduction	5
I, 1 : Formule d'interpolation de Lagrange; forme générale des coefficients; aspect particulier, lorsque la base est rectiligne équidistante, ou polygone régulier dans le plan complexe. Cas du polygone avec son centre	5
I, 2 : Transition avec la formule de l'intégrale de contour de Cauchy (cas du cercle)	8
II, 1 : Composition des interpolations : théorème fondamental	9
II, 2 : Différences divises, vérification du théorème sur la composition des interpolations.	10
II, 3 : Expression de l'interpolée par un développement limité, suite des interpolées. Comparaison des coefficients lagrangiens et newtoniens. Etude du reste.	12
II, 4 : Etude de la composition plus générale des interpolations	13
III : Applications de la composition des interpolations	15
III, 1 : Exemples de calculs d'interpolations linéaires composées dans le domaine complexe. Calculs de coefficients lagrangiens dans la maille carrée pour la sous tabulation binaire. Base à 3 points, à 4 points, à 5 points	15
III, 2 : Composition d'interpolations linéaires par voie géométrique. Interpolation complexe par voie graphique dans les bases d'ordre quelconque formant des dispositifs non réguliers. Application à l'adaptation des systèmes de coordonnées géodésiques. Variante semi-graphique utile dans la discussion des adaptations géodésiques : interpolation sur les facteurs d'homothétie rotation : "pentes" complexes	16
IV : Étude de la formule du reste de Lagrange pour les cas de la pratique usuelle.	19
CHAPITRE II - MÉTHODES D'INTERPOLATION NUMÉRIQUE DANS LA MAILLE CARRÉE...	21
Introduction	21
I : Préliminaires	22
I, 1 : Tableau des dérivées d'une fonction complexe	22
I, 2 : Rappel des formules donnant les dérivées en fonction des différences centrales, (fonctions d'une variable)	22
I, 3 : Valeurs numériques prises par un polynôme complexe aux sommets d'un dispositif carré centré. Analyse des termes successifs	22
I, 4 : Formules de changement d'unité; passage des axes "diagonaux" aux axes "normaux"	24
I, 5 : Application : formules d'usage pour le calcul des dérivées complexes, d'après une grille carrée	25
II : Sous tabulation dans la maille carrée	27
II, 1 : Sous tabulation binaire dans la maille carrée	27
II, 1, 1 : Interpolation à 4 points (du 3 ^o degré) au centre du carré : bipartition de maille	27

II, 1, 2 : Construction de la fonction sur un ensemble dense de points au moyen d'un fractionnement réitéré des mailles. Emploi de la bipartition de maille	28
II, 1, 3 : Complément au précédent : obtention des points médians des côtes par interpolation complexe 3, 4, ou 5 points.	29
II, 1, 4 : Tableau des dispositifs de sous tabulation binaire pour la maille carrée jusqu'à la base de 5 points	31
II, 2 : Sous tabulation décimale dans la maille carrée	32
II, 2, 1 : Rappel des tableaux de coefficients Lagrangiens calculés par de précédents auteurs; Utilité pour le calcul de points isolés par interpolation du 2ème ou du 1er degré	32
II, 2, 2 : Table des valeurs numériques pour le coefficient d'interpolation Lagrangiens à 4 points, base carrée (d'après Lowan et Salzer).	32
II, 2, 3 : Décroissance du reste quand la maille se resserre	34
III : Pratique de l'interpolation pour le calcul des points isolés dans une grille carrée; choix des formules dans les cas d'espèce	34
III, 1 : Interpolation par polynôme du 3ème degré, exacte aux 4 sommets de la maille	34
III, 2 : Interpolation par polynôme, tronqué au 2ème degré, résidus au sommet du carré de maille	34
III, 3 : Interpolation par polynôme, tronqué au 1er degré	34
III, 4 : Interpolation Lagrangienne du 2ème degré, exacte en trois sommets de maille carrée	35
III, 5 : Exemples numériques de l'application des formules	38
Index des formules pour la première partie	43

2° Partie : EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMÉRIQUES A LA CONSTRUCTION DES CARTES

BIBLIOGRAPHIE	49
Introduction de la 2ème partie	51
CHAPITRE III - GENERALITES SUR LES CHANGEMENTS DE PROJECTION CONFORME ...	53
I : Description récapitulative des projections considérées	53
I, 1 : Projection Stéréographique Polaire, et projection de Mercator	53
I, 2 : Projections coniques conformes, dites de LAMBERT	54
I, 3 : Projection de Mercator Transverse	55
I, 4 : Projection de Mercator Oblique	56
II : Méthodes générales d'obtention des formules de passage	56
II, 1 : Cas où la droite est globalement conservée	56
II, 2 : Cas où l'on connaît par avance la représentation sur le plan U d'une ligne droite du plan z.	57
II, 3 : Recours à l'intermédiaire d'une projection auxiliaire	57
II, 4 : Application de résultats généraux concernant le tracé des lignes géodésiques sur les projections	57
CHAPITRE IV - ETUDE DES PRINCIPAUX CAS D'APPLICATION : FORMULES PARTICULIERES ET DISCUSSION NUMERIQUE	61
Introduction	61
Formules de passage d'une projection à une autre :	61

I : De conique (Projection LAMBERT) à Mercator : fonction Log.	61
II : De conique à conique (zones voisines en recouvrement : fonction puissance)	62
III : De Mercator Transverse à Conique conforme	63
IV : De Mercator Transverse à Mercator (Géographiques)	65
V : Passage entre deux projections de MERCATOR Transverse, fuseaux adjacents	67
V,1 : Nature de la transformation : étude directe des points critiques	67
V,2 : Etude de la formule de passage à l'Equateur, emploi de la méthode générale a)	69
V,3 : Centre à une latitude quelconque : utilisation des coordonnées de MERCATOR comme intermédiaires et usage des formules de composition (méthode générale c).	71
V,4 : Traitement du problème à partir des formules explicites du passage de f à F (centrées sur le méridien central de f). Obtention des coefficients par dérivation	72
V,5 : Assimilation du problème général du tracé d'une ligne géodésique sur une projection. Application pour le changement de projection, l'une des projections étant définie par une géodésique quelconque comme ligne de base	75
V,6 : Synthèse des résultats acquis au sujet du développement analytique représentant le changement de fuseau de Mercator Transverse	78
V,7 : Présentation d'exemple numérique	78
VI : Conclusion d'ensemble sur l'étude des développements analytiques représentant les transformations conformes géodésiques	82
CHAPITRE V - PROBLEME DES COORDONNEES HYPERBOLIQUES	83
I : Système bifocal plan	83
II : Système sphérique	84
II,1 : Réseau homofocal sphérique	84
II,2 : Propriétés découlant de l'interprétation des formules de l'ordonnée isotherme elliptique	85
II,3 : Comparaison avec le problème plan, étude au voisinage des foyers	85
II,4 : Etude générale du problème; examen du planisphère elliptique de PEIRCE.	86
II,5 : Etude analytique directe de la fonction $(\mathcal{L} + iM) =$ fonction de $(p + iq)$	88
II,6 : Transition de la carte de PEIRCE avec celle de MERCATOR; examen du canevas de la carte de GUYOU; fonction associée : $Am u$ (Notation de JACOBI)	89
II,7 : Présentation d'exemple numérique	90
Conclusion de la 2ème partie : relation avec les travaux de l'école de SOUTHWELL, sur la méthode de relaxation	91
Index des formules pour la 2ème partie	93

1	I : De quelques propriétés des courbes algébriques	1
2	II : De quelques propriétés des courbes algébriques	2
3	III : De quelques propriétés des courbes algébriques	3
4	IV : De quelques propriétés des courbes algébriques	4
5	V : De quelques propriétés des courbes algébriques	5
6	VI : De quelques propriétés des courbes algébriques	6
7	VII : De quelques propriétés des courbes algébriques	7
8	VIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	8
9	IX : De quelques propriétés des courbes algébriques	9
10	X : De quelques propriétés des courbes algébriques	10
11	XI : De quelques propriétés des courbes algébriques	11
12	XII : De quelques propriétés des courbes algébriques	12
13	XIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	13
14	XIV : De quelques propriétés des courbes algébriques	14
15	XV : De quelques propriétés des courbes algébriques	15
16	XVI : De quelques propriétés des courbes algébriques	16
17	XVII : De quelques propriétés des courbes algébriques	17
18	XVIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	18
19	XIX : De quelques propriétés des courbes algébriques	19
20	XX : De quelques propriétés des courbes algébriques	20
21	XXI : De quelques propriétés des courbes algébriques	21
22	XXII : De quelques propriétés des courbes algébriques	22
23	XXIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	23
24	XXIV : De quelques propriétés des courbes algébriques	24
25	XXV : De quelques propriétés des courbes algébriques	25
26	XXVI : De quelques propriétés des courbes algébriques	26
27	XXVII : De quelques propriétés des courbes algébriques	27
28	XXVIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	28
29	XXIX : De quelques propriétés des courbes algébriques	29
30	XXX : De quelques propriétés des courbes algébriques	30
31	XXXI : De quelques propriétés des courbes algébriques	31
32	XXXII : De quelques propriétés des courbes algébriques	32
33	XXXIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	33
34	XXXIV : De quelques propriétés des courbes algébriques	34
35	XXXV : De quelques propriétés des courbes algébriques	35
36	XXXVI : De quelques propriétés des courbes algébriques	36
37	XXXVII : De quelques propriétés des courbes algébriques	37
38	XXXVIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	38
39	XXXIX : De quelques propriétés des courbes algébriques	39
40	XL : De quelques propriétés des courbes algébriques	40
41	XLI : De quelques propriétés des courbes algébriques	41
42	XLII : De quelques propriétés des courbes algébriques	42
43	XLIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	43
44	XLIV : De quelques propriétés des courbes algébriques	44
45	XLV : De quelques propriétés des courbes algébriques	45
46	XLVI : De quelques propriétés des courbes algébriques	46
47	XLVII : De quelques propriétés des courbes algébriques	47
48	XLVIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	48
49	XLIX : De quelques propriétés des courbes algébriques	49
50	L : De quelques propriétés des courbes algébriques	50
51	L I : De quelques propriétés des courbes algébriques	51
52	L II : De quelques propriétés des courbes algébriques	52
53	L III : De quelques propriétés des courbes algébriques	53
54	L IV : De quelques propriétés des courbes algébriques	54
55	L V : De quelques propriétés des courbes algébriques	55
56	L VI : De quelques propriétés des courbes algébriques	56
57	L VII : De quelques propriétés des courbes algébriques	57
58	L VIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	58
59	L IX : De quelques propriétés des courbes algébriques	59
60	L X : De quelques propriétés des courbes algébriques	60
61	L XI : De quelques propriétés des courbes algébriques	61
62	L XII : De quelques propriétés des courbes algébriques	62
63	L XIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	63
64	L XIV : De quelques propriétés des courbes algébriques	64
65	L XV : De quelques propriétés des courbes algébriques	65
66	L XVI : De quelques propriétés des courbes algébriques	66
67	L XVII : De quelques propriétés des courbes algébriques	67
68	L XVIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	68
69	L XIX : De quelques propriétés des courbes algébriques	69
70	L XX : De quelques propriétés des courbes algébriques	70
71	L XXI : De quelques propriétés des courbes algébriques	71
72	L XXII : De quelques propriétés des courbes algébriques	72
73	L XXIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	73
74	L XXIV : De quelques propriétés des courbes algébriques	74
75	L XXV : De quelques propriétés des courbes algébriques	75
76	L XXVI : De quelques propriétés des courbes algébriques	76
77	L XXVII : De quelques propriétés des courbes algébriques	77
78	L XXVIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	78
79	L XXIX : De quelques propriétés des courbes algébriques	79
80	L XXX : De quelques propriétés des courbes algébriques	80
81	L XXXI : De quelques propriétés des courbes algébriques	81
82	L XXXII : De quelques propriétés des courbes algébriques	82
83	L XXXIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	83
84	L XXXIV : De quelques propriétés des courbes algébriques	84
85	L XXXV : De quelques propriétés des courbes algébriques	85
86	L XXXVI : De quelques propriétés des courbes algébriques	86
87	L XXXVII : De quelques propriétés des courbes algébriques	87
88	L XXXVIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	88
89	L XXXIX : De quelques propriétés des courbes algébriques	89
90	L XL : De quelques propriétés des courbes algébriques	90
91	L XLI : De quelques propriétés des courbes algébriques	91
92	L XLII : De quelques propriétés des courbes algébriques	92
93	L XLIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	93
94	L XLIV : De quelques propriétés des courbes algébriques	94
95	L XLV : De quelques propriétés des courbes algébriques	95
96	L XLVI : De quelques propriétés des courbes algébriques	96
97	L XLVII : De quelques propriétés des courbes algébriques	97
98	L XLVIII : De quelques propriétés des courbes algébriques	98
99	L XLIX : De quelques propriétés des courbes algébriques	99
100	L L : De quelques propriétés des courbes algébriques	100

